Mathematik I (BIOL, HEST, PHAR) HS 2018
Prof. W. Farkas

Serie 13

Aufgabe 1

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in die kartesische Form $z = x+iy$.

(a) $z = \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{2i + \cfrac{1}{3i+1}}}$

(b) $z = (1 - \sqrt{3}\, i)^{10}$

(c) $z = (1 - i)^{-8}$

Aufgabe 2

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in die kartesische Form $z = x+iy$ und bestimmen Sie damit den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z. Dabei steht z^* für die zu z komplex konjugierte Zahl.

(a) z mit $\frac{1}{|z|^2} = 2$ und $\arg(z^*) = \dfrac{3\pi}{4}$

(b) z mit $|iz| = \sqrt{2}$ und $\mathrm{Im}((z^*)^2) = 2$

Aufgabe 3

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungen in kartesischer Form an.

(a) $4zz^* + (z - z^*)^2 = 1$ Hinweis: Setzen Sie mit $z = x + iy$ an.

(b) $z^2 = -8 + i\ 8\sqrt{3}$

(c) $z^3 = -1$

(d) $z^3 = 8$

(e) $z^4 = -2 - i\,2\sqrt{3}$

(f) $z^2 = 2 - i\,2\sqrt{3}$

Aufgabe 4

Folgende Aufgabe stammt aus der Basisprüfung Sommer 2016.

(a) Stellen Sie folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$ dar.

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq 3 \text{ und } |z| \geq 2\right\}$$

(b) Die Gleichung

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1-i)$$

besitzt drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 in den komplexen Zahlen.

Geben Sie die Lösungen **in Polardarstellung** an, das heisst entweder in trigonometrischer Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder in exponentieller Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit jeweils $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an. Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$z_1 =$ ____________ $z_2 =$ ____________ $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7}{4}\pi}$

(c) Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Und sei

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big).$$

Wie muss α gewählt werden, damit z eine **positive reelle** Zahl ist? Das heisst, damit $\mathrm{Im}(z) = 0$ und $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt?

Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

$\alpha =$ ____________

(d) Schreiben Sie Ihre Antwort **direkt auf das Aufgabenblatt.**

Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen **in kartesischer Darstellung** $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{1 - \frac{1-i}{1+i}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi}(1 - i\sqrt{3})^3 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Berechnen Sie den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $\overline{2i\left(\sqrt{-49} + 3\right)}$, also

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{2i\left(\sqrt{-49} + 3\right)}\Big) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Hinweis: Hier bezeichnet $\overline{z}$ die komplex Konjugierte der Zahl z.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Keine Abgabe dieser Serie.