ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 2: Stetigkeit

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

2. Stetigkeit

- Reelle Zahlenfolgen
  - Grenzwert einer Folge
- Grenzwert einer Funktion
- Stetigkeit einer Funktion

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 173-186**

Reelle Zahlenfolgen:

- Jeder positiven ganzen Zahl n wird in eindeutiger Weise eine reelle Zahl a_n zugeordnet.
  Die unendliche Menge reeller Zahlen a_1, a_2, a_3, ... heisst reelle Zahlenfolge.
- Symbolische Schreibweise:

$$(a_n) : a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

- Die Zahlen a_1, a_2, a_3, ... heissen die *Glieder der Folge*, a_n ist das n-te Glied der Folge.
- Anmerkung: Eine reelle Zahlenfolge wird auch kurz als Folge bezeichnet.

Bildungsgesetz reeller Zahlenfolgen

- Anmerkung: Eine Zahlenfolge (a_n) kann auch als diskrete Funktion aufgefasst werden, die jedem $n \in \mathbb{N}^*$ genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.
- Eine Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung

$$a_n = f(n) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

heisst Bildungsgesetz der Folge.

Beispiele

- $(a_n) = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots$
  Bildungsgesetz: $a_n = -\frac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $(a_n) = 1^3, 2^3, 3^3, \dots$
  Bildungsgesetz: $a_n = n^3 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $(a_n) = 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots$
  Bildungsgesetz: $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Darstellungsformen reeller Zahlenfolgen

- **a) Zahlenstrahl:**
  Die Glieder einer Folge (a_n) lassen sich durch Punkte auf einem Zahlenstrahl darstellen.
  Beispiel:
  $$(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$
- **b) Graph:**
  Eine Folge (a_n) lässt sich auch durch einen Graph auf einem rechtwinkligen Koordinatensystem anschaulich darstellen.
  Die Menge aller Punkte $P_n = (n; a_n)$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ heisst Graph der Folge (a_n).
  Beispiel:
  $$(a_n) = f(n) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Einleitung zum Grenzwert einer Folge

- Wir können die Zahlenfolge

$$(a_n) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

in einer Wertetabelle auftragen:

n	1	2	3	...	10	...	100	...	1000	...
(a_n)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	...	0,9	...	0.99	...	0,999	...

Wir erkennen, dass sich die Glieder der Folge mit zunehmender „Platzziffer" n immer weniger von der Zahl 1 unterscheiden. Die Zahl 1 wird daher als der *Grenzwert* der Folge $(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ für $n \to \infty$ bezeichnet.

Definition Grenzwert

- Die reelle Zahl g heisst *Grenzwert (oder Limes)* der Zahlenfolge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ stets

  $$|a_n - g| < \varepsilon$$

  gilt.
- Anmerkung:
  Die natürliche n_0 hängt im Allgemeinen von der Wahl der Zahl $\varepsilon > 0$ ab.
  Daher schreibt man häufig auch $n_0(\varepsilon)$ statt nur n_0.

Definition Konvergenz

- Eine Folge (a_n) heisst *konvergent*, wenn sie einen endlichen Grenzwert g besitzt.
  Symbolische Schreibweise:

  $$\lim_{n \to \infty} a_n = g$$

  (gelesen: Limes von a_n für n gegen Unendlich gleich g)

- Eine Folge (a_n), die keinen Grenzwert hat oder die einen Grenzwert hat, der gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist, heisst *divergent*.

Beispiele zu Grenzwerten von Folgen

- Die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

  ist konvergent mit dem Grenzwert

$$g = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

  (eine sogenannte Nullfolge).

- Die Folge $(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ hat den Grenzwert

$$g = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Sie ist dementsprechend eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $g = 1$.

Grenzwert einer Folge

- Die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$ ist konvergent mit dem Grenzwert

$$g = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71828182\ldots = e$$

(ohne Beweis).
Die Zahl e heisst Eulersche Zahl.
Sie ist die Basis der wichtigsten Exponentialfunktion, der sogenannten e-Funktion.

- $(a_n) = (n^3) = 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

$$g = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty.$$

Diese Zahlenfolge ist divergent (sie wird auch als bestimmt divergente Folge bezeichnet).

Grenzwert einer Funktion

- **Problem:**
  Wie verhält sich die Funktion $f(x) = x^2$ in der Nähe von $x_0 = 2$?
  Was ist also $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?
- Sei $x_n = 2 - \frac{1}{n}$. Da $\frac{1}{n} \to 0$ gilt, gilt auch $x_n = 2 - \frac{1}{n} \to 2$.
  Weiter ist

$$f(x_n) = (x_n)^2 = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4 - \underbrace{\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\to 0}$$

also

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 4.$$

Definition

- Sei x_0 fest und sei eine Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung von x_0 definiert. Gilt für *jede* im Definitionsbereich der Funktion liegende konvergierende Zahlenfolge (x_n) mit $x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ stets

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g,$$

  so heisst g der Grenzwert von $y = f(x)$ an der Stelle x_0.
- Die symolische Schreibweise lautet:

  $$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

  (gelesen: Limes von $f(x)$ für x gegen x_0 gleich g).

Anmerkungen

- Es sei darauf hingewiesen, dass die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 nicht definiert sein muss. Sie kann in x_0 einen Grenzwert besitzen ohne dort definiert zu sein.
- Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet zwar, dass x *beliebig nahe* an x_0 kommt, aber stets gilt $x \neq x_0$.

Anmerkungen

- Wenn die Folge (x_n) wie in unserem Anfangsbeispiel *von links her* gegen x_0 strebt, schreibt man:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x) = g_\ell$$

  und spricht vom linksseitigen Grenzwert.

- Analog für den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x) = g_r$$

- Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert g, so gilt:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

Beispiel 1

- Die sogenannte Sprungfunktion

$$y = \sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist zwar an der Stelle $x_0 = 0$ definiert ($\sigma(0) = 1$), besitzt dort aber keinen Grenzwert, da der linksseitige Grenzwert nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt:

$$g_\ell = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} \sigma(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} 0 = 0$$

$$g_r = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \sigma(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} 1 = 1$$

Beispiel 2

- Die Funktion $y = f(x) = \frac{3x^2-6x}{x-2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
- Sie besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 3x = 6$$

(der Faktor $x - 2$ ist wegen $x \neq 2$ stets von Null verschieden und kann daher gekürzt werden)

Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$

- Besitzt eine Funktion $y = f(x)$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte $(f(x_n))$ für jede über alle Grenzen hinaus wachsende Zahlenfolge (x_n) mit $x_n \in D$ gegen eine Zahl g strebt, so heisst g der Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$.
- Wir verwenden dafür die symbolische Schreibweise

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g.$$

Beispiele zum Grenzwert einer Funktion

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} = \infty \quad \text{uneigentlicher Grenzwert}$$

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

- Unter der Voraussetzung, dass die Grenzwerte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 existieren, gelten die folgenden Regeln:

1. $$\lim_{x \to x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \qquad (\text{C: } \textit{Konstante})$$
2. $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$
3. $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$
4. $$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

1. $$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

2. $$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

3. $$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)}$$

4. $$\lim_{x\to x_0} [\log_a f(x)] = \log_a \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Anmerkungen:

1. Diese Regeln gelten entsprechend auch für Grenzwerte vom Typ $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.
2. Wir werden später Grenzwerte, die zu einem sogenannten unbestimmten Ausdruck vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, mit der Regel von Bernoulli-L'Hospital behandeln.

Stetigkeit einer Funktion

- **Definition:** Eine in x_0 und in einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heisst an dieser Stelle x_0 *stetig*, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle existiert und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Anmerkung:
Alle elementaren Funktionen sind auf dem maximalen Definitionsbereich stetig z.B.:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$
- genau so ist $g(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$
- $h_1(x) = \sin(x), h_2(x) = \cos(x)$ sind stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$
- $u(x) = e^x$ ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$
- $v(x) = \log x$ ist stetig in jedem $x_0 \in (0, \infty)$

Links- und rechtsstetig:

- Eine Funktion heisst *linksstetig* in x_0, falls $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ (d. h. der linke Grenzwert existiert und ist genau $f(x_0)$).
- Eine Funktion heisst *rechtsstetig* in x_0, falls $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- Eine Funktion, die in x_0 sowohl links- also auch rechtsstetig ist, ist somit *stetig* in x_0 (so wie wir das oben definiert haben).

Beispiel 1:

- Wo ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

stetig?

Lösung Beispiel 1:

- Sei $x_0 \in (-\infty, 0)$. f ist konstant (elementar) auf $(-\infty, 0)$, somit ist f stetig in $x_0 \in (-\infty, 0)$.

- Sei $x_0 \in (0, \infty)$. f ist linear (polynomial) auf $(0, \infty)$, somit ist f stetig in $x_0 \in (0, \infty)$.

- Untersuche Stetigkeit in $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -1 = \mathbf{-1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 = \mathbf{1}$$

Da aber $f(0) = 0$ ist die Funktion für $x_0 = 0$ nicht stetig.

Ergänzungen zu Beispiel 1:

- Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ -1 & \text{für } x = 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
ist *linksstetig ohne stetig* in $x_0 = 0$ zu sein, da zwar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1 = f(0)$ aber $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1 \neq -1 = f(0)$.
- Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
ist *rechtsstetig* in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x+1) = 1 = f(0)$.

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^3-1} & \text{für } x \neq 1 \\ m & \text{für } x = 1 \end{cases} \qquad \text{wobei } m \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

Bestimmen Sie die Werte von m so, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Lösung Beispiel 2:

- Für $x \neq 1$ ist f ein Quotient zweier Polynomialfunktionen:

$$\frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 + x + 1 \neq 0$ da $D = 1 - 4 < 0$ (Es gibt für diese Gleichung keine reelle Lösung, da die Diskriminante kleiner 0 ist.)

Somit ist f eine elementare Funktion und damit stetig für jeden Punkt $x_0 \neq 1$, denn es gilt für $x \neq 1$: $\quad f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

Fortsetzung Lösung Beispiel 2:

- Untersuchung der Stetigkeit in $x_0 = 1$: Es gilt einerseits

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

  und andererseits ist $f(1) = m$ nach Vorschrift von f.

- Nach Definition ist f stetig in $x_0 = 1$, falls $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.
  $\Rightarrow \dfrac{1}{3} = m$
- Fazit: f ist stetig in $x_0 = 1$ (und somit auf ganz $\mathbb{R}$) genau dann wenn: $\boxed{m = \frac{1}{3}}$