ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 3: Differentialrechnung

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

3. Differentialrechnung

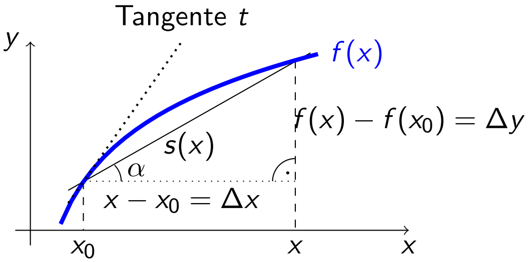
- Einführung
- Ableitung elementarer Funktionen
- Ableitungsregeln
- Kettenregel
- Ableitung der Umkehrfunktion

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 323-347**
  Seiten 414-418 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Problemstellung

- **Tangentenproblem:**



Was ist die Steigung der Sekante s?

$\Rightarrow$ Die Steigung ist $\tan(\alpha) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Die Steigung im Punkt x_0

- Wir lassen $x \to x_0$ streben, dadurch strebt die Abszissendifferenz gegen Null (d.h. $\Delta x \to 0$).
- Tangentensteigung m im Punkt $(x_0; f(x_0))$:

$$\boxed{m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Definition

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$
- beachten Sie: f *ist definiert in* x_0!
- Dann heisst f differenzierbar oder ableitbar in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und endlich ist.

Bemerkungen

- Dieser Grenzwert wird $f'(x_0)$ bezeichnet und wird 1. Ableitung von f in x_0 genannt.
- Analog zur Stetigkeit gibt es Begriffe wie *links-differenzierbar* bzw. *rechts-differenzierbar* in x_0.

Bemerkungen

- Es gibt diverse Bezeichnungen für Ableitungen:

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left(\frac{d}{dx} f\right)_{x_0} = \left(\frac{d}{dx} y\right)_{x_0}$$

- falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ gilt,
  ist die Terminologie:
  f hat eine Ableitung in x_0 die $\pm\infty$ ist.

Beispiel

- Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$:

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4 \end{aligned}$$

Fazit

- f ist differenzierbar in $x_0 = 2$ und $f'(2) = 4$
- Daraus folgt die Tangentengleichung in $(2, 4)$:

$$y = -4 + 4x$$

Bemerkung (wichtig!)

- *Falls f in x_0 nicht stetig ist, folgt, dass f in x_0 nicht differenzierbar ist.*
- Es gibt aber Punkte x_0, in denen f stetig ist, aber nicht differenzierbar.
  Dazu folgendes Beispiel.

Beispiel

- $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
  Ist f stetig in $x_0 = 0$?

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$$

- **Fazit:** Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert, da die Grenzwerte von links und von rechts übereinstimmen und es gilt auch $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, also ist f stetig in $x_0 = 0$.

- **Ableitung(en)**

Die Ableitung von links ist

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

Die Ableitung von rechts ist

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{x} = 1.$$

- **Fazit:** Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existiert nicht, da die Grenzwerte von links und von rechts nicht übereinstimmen. Somit ist f *nicht* differenzierbar in $x_0 = 0$.

Ableitung elementarer Funktionen

Eine kleine Übersicht von 1. Ableitungen elementarer Funktionen:

Funktion	$f(x)$	**Ableitung** $f'(x)$
Konstante Funktion	c =const.	0
Potenzfunktion	x^n ($n \in \mathbb{R}$ fest)	$n \cdot x^{n-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ableitung elementarer Funktionen

Trig. Funkt.	$f(x)$	**Ableitung** $f'(x)$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Ableitung elementarer Funktionen

Funktion	$f(x)$	**Ableitung** $f'(x)$
Exponentialfunkt.	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunkt.	$\ln x = \log x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Lineare Funkt.	x	1
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Beweis der Potenzregel

$$\text{Zeige:}\quad \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ fest})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{\binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}
\end{aligned}$$

Nun bilden wir den Grenzwert

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right]\\ &= \binom{n}{1}x^{n-1} = \underline{\underline{n\cdot x^{n-1}}}\end{aligned}$$

Damit ist die Potenzregel für positiv-ganzzahlige Exponenten bewiesen.

- Die Potenzregel gilt aber auch für *beliebige reelle* Exponenten (ohne Beweis).

Schreibweise:

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}}$$

Beispiele zur Potenzregel:

$$(x^2)' = 2x$$
$$(x^3)' = 3x^2$$
$$(x^4)' = 4x^3$$
$$(x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

Spezialfall:

$$x' = 1$$

Faktorregel

- Ein *konstanter* Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$\boxed{y(x) = C \cdot f(x) \Rightarrow y'(x) = C \cdot f'(x)}$$ (C: Reelle Konstante)

Beweis der Faktorregel

$y(x) = C \cdot f(x)$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot f(x + \Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} C \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= C \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Beispiele:

$$y(x) = 10x^4 \Rightarrow y'(x) = \tfrac{d}{dx}(10x^4) = 10 \cdot \tfrac{d}{dx}(x^4) = 10 \cdot 4x^3 = 40x^3$$

$$x(t) = 4 \cdot \sin t \Rightarrow x'(t) = \tfrac{d}{dt}(4 \cdot \sin t) = 4 \cdot \tfrac{d}{dt}(\sin t) = 4 \cdot \cos t$$

$$y(x) = 5 \cdot \ln x \Rightarrow y'(x) = \tfrac{d}{dx}(5 \cdot \ln x) = 5 \cdot \tfrac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \tfrac{1}{x} = \tfrac{5}{x}$$

$$y(x) = -3 \cdot e^x \Rightarrow y'(x) = \tfrac{d}{dx}(-3 \cdot e^x) = -3 \cdot \tfrac{d}{dx}(e^x) = -3 \cdot e^x$$

Summenregel

Bei einer *endlichen* Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$\boxed{y(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow y'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

Beispiele:

$$(\sin x + e^x)' = (\sin x)' + (e^x)' = \cos x + e^x$$

$$(x^{\frac{3}{2}} - \log x)' = (x^{\frac{3}{2}})' - (\log x)' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}$$

Produktregel

Die Ableitung der in der Produktform $y(x) = f(x) \cdot g(x)$ darstellbaren Funktion erhält man nach der *Produktregel:*

$$\boxed{y'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Beispiele:

$$(e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$(x^2 \cdot \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die als Quotient zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in der Form $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ darstellbar ist, erhält man nach der *Quotientenregel*:

$$\boxed{y'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^3+2x-1}{e^x+2x^4}\right)' \\
&= \frac{(x^3+2x-1)' \cdot (e^x+2x^4) - (x^3+2x-1) \cdot (e^x+2x^4)'}{(e^x+2x^4)^2} \\
&= \frac{(3x^2+2-0)(e^x+2x^4) - (x^3+2x-1)(e^x+8x^3)}{(e^x+2x^4)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(\cos x)^2}}}
\end{aligned}
$$

Spezialfall:

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Beweis Mit $f(x) = 1$ folgt $f'(x) = 0$ und daher

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-1 \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beispiel 1:

$$g(x) = x^{\frac{3}{2}} + e^x$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{(x^{\frac{3}{2}} + e^x)'}{(x^{\frac{3}{2}} + e^x)^2} = -\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + e^x}{(x^{\frac{3}{2}} + e^x)^2}$$

Beispiel 2:

$$g(x) = x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Kettenregel
Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion $y(x) = g(f(x)) = h(x)$ erhält man als Produkt aus der äusseren und der inneren Ableitung:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dy}(f(x)) \cdot \frac{df}{dx}$$

oder anders geschrieben:

$$y'(x) = \left[g(f(x))\right]' = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$$

Vereinfacht:

$$(g(f))' = g'(f) \cdot f'$$

Beispiel 1

$$h(x) = (\ln x)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad h(x) = g(f(x)) \text{ mit } f(x) = \ln x \text{ und } g(y) = y^{\frac{3}{2}}$$

$$g'(y) = \left(y^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \left[(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \underline{\underline{\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}}}$$

Hinweis (für praktische Berechnungen):

$$h(x) = (\ln x)^{\frac{3}{2}} = y^{\frac{3}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{3} y^{\frac{1}{2}} \cdot y' = \frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)'$$

Beispiel 2

$$h(x) = e^{(x^4+\sin x)} \Rightarrow y = x^4 + \sin x$$
$$h'(x) = (e^y)' = e^y \cdot y' = e^{(x^4+\sin x)} \cdot (x^4 + \sin x)'$$
$$= e^{(x^4+\sin x)} \cdot (4x^3 + \cos x)$$

Beispiel 3

$$h(x) = \sin(2x^3 + e^x) \Rightarrow y = 2x^3 + e^x$$
$$h(x) = \sin y$$
$$h'(x) = (\sin y)' \cdot y' = \cos y \cdot y' = \cos(2x^3 + e^x) \cdot (6x^2 + e^x)$$

Logarithmische Ableitung

- Was ist die Ableitung von

$$h(x) = x^x \qquad \text{oder allgemeiner von} \qquad (f(x))^{g(x)} \quad ?$$

$\rightarrow$ Das ist nicht der Form x^n (da n fest sein müsste).
$\rightarrow$ Das ist nicht der Form a^x (da a fest sein müsste).

- In vielen Fällen, beispielsweise bei Funktionen vom Typ $h(x) = (f(x))^{g(x)}$ mit $f(x) > 0$, gelingt die Differentiation der Funktion nach dem folgenden Schema:
    1. Logarithmieren der Funktionsgleichung.
    2. Differenzieren der logarithmierten Gleichung unter Verwendung der Kettenregel.

Kettenregel

1. Betrachte $\ln(h(x))$.
2. Bezeichne $y(x) = \ln(h(x))$ und suche $y'(x)$.

$$h(x) = (f(x))^{g(x)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \ln h(x) = \ln\left((f(x))^{g(x)}\right)}$$

$$\ln h(x) = g(x) \cdot \ln f(x) \quad \text{mit Logarithmenregel}$$

$$(\ln h(x))' = (g(x) \cdot \ln f(x))'$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot [\ln f(x)]'$$

$$\boxed{h'(x) = h(x)\left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right]}$$

Beispiel 1

$$\boxed{h(x) = x^x,\ \text{für } x > 0 \quad (\text{hier wäre } f(x) = x \text{ und } g(x) = x)}$$

$$\begin{aligned}
\ln h(x) &= \ln(x^x) \\
&= x \ln(x) \\
(\ln h(x))' &= (x \ln(x))' \\
\frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) &= x' \cdot \ln(x) + x\,(\ln(x))' \\
&= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \qquad \Big| \cdot h(x) \\
h'(x) &= h(x) \cdot (\ln(x) + 1) \\
&= \underline{\underline{x^x(\ln(x) + 1)}}
\end{aligned}$$

Beispiel 1 (alternativ)
Umformen:

$$\boxed{h(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)},\ \text{für } x > 0}$$

Dann gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(e^{x\ln(x)}\right)' \\ &= e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))' \\ &= e^{x\ln(x)} \cdot \left[(x'\ln x + x(\ln(x))'\right] \\ &= e^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) \\ &= x^x(\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\boxed{h(x) = (\cos x)^{(e^x + x^2)}}$$

$$\begin{aligned}
\ln h(x) &= \ln\left[(\cos x)^{(e^x+x^2)}\right] \\
\ln h(x) &= (e^x + x^2)\cdot \ln(\cos x) \\
\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x) &= (e^x + x^2)'\cdot \ln(\cos x) + (e^x + x^2)\cdot (\ln(\cos x))' \\
&= (e^x + 2x)\cdot \ln(\cos x) + (e^x + x^2)\cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x) \quad \Big| \cdot h(x) \\
h'(x) &= h(x)\cdot \left[(e^x + 2x)\ln(\cos x) + (e^x + x^2)\cdot \frac{1}{\cos x}\cdot (-\sin x)\right]
\end{aligned}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

- Eine Funktion $y = f(x)$ sei umkehrbar und $x = g(y)$ sei die nach der Variablen x aufgelöste Form dieser Funktion. Oft verwendet man das Symbol $g = f^{-1}$.
- Dann besteht zwischen den Ableitungen dieser beiden Funktionen der folgende Zusammenhang: für $y = f(x)$ gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{(falls } f'(x) \neq 0 \text{ ist).}$$

- Hieraus erhält man durch die beiden folgenden Schritte die gesuchte Ableitung der Umkehrfunktion $y = g(x)$:
  1. In der Ableitung $f'(x)$ wird zunächst die Variable x durch $g(y)$ ersetzt
  2. Anschliessend werden auf beiden Seiten die Variablen x und y miteinander vertauscht (formale Umbenennung der beiden Variablen).

Beispiel 1

Ableitung der Umkehrfunktion von $\boxed{f(x) = x^2, \text{ wobei } x > 0}$

Zuerst Ableitung $f'(x)$ in Formel einsetzen und x durch $f^{-1}(y)$ ersetzen:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \quad y = f(x) = x^2 \ (y > 0)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2x}; \qquad y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y) \ (\text{weil } x > 0)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Leftrightarrow (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \ (\text{mit } y > 0)$$

Dann Variablen x und y vertauschen: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Beispiel 2

Ableitung der Umkehrfunktion von $\boxed{f(x) = a^x;\ a \neq 1}$

Zuerst Ableitung $f'(x)$ in Formel einsetzen und x durch $f^{-1}(y)$ ersetzen:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \quad y = f(x) = a^x \Rightarrow x = \log_a y = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$$

Dann Variablen x und y vertauschen: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$