Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 6: Potenzreihen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

6. Potenzreihen

- Reihen (Zahlenreihen)
- Konvergenzkriterien für Reihen
  - Notwendiges Konvergenzkriterium
  - Vergleich mit einer konvergenten Reihe
  - Quotientenkriterium
  - Kriterium für alternierende Reihen
- Potenzreihen
- Taylor-Reihen
- Das Integralkriterium

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 570 - 630,**
  Seiten 633 - 6393 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Folgen und Reihen

Folgen bisher: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$
z. B.:

$$2, 4, 6, 8, \ldots \quad a_n = 2n, \cdots$$
$$\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^n \ldots \quad a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Gegeben eine Folge $(a_n)_n$, kann man eine neue Folge bilden:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

(z. B.: falls $a_n = 2n$

$\Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2n$)

Man schreibt auch:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (\Sigma\text{-Notation}).$$

Definition

- Gegeben sei eine Folge $(a_n)_n$.
- Die Folge $(s_n)_n$ *zusammen* mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (falls er existiert) heisst Reihe.
- Notation:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bezeichnung:
a_n ist das n-te Reihenglied
s_n heisst n-te Partialsumme

Konvergenz und Divergenz von Reihen

- Eine Reihe heisst konvergent, falls die Folge der Partialsummen zu einem endlichen Wert konvergiert, also falls

$$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}.$$

- Eine Reihe heisst divergent, falls die Folge der Partialsummen entweder einen unendlichen oder gar keinen Grenzwert besitzt, also falls

$$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ existiert aber } \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\pm\infty\}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ existiert nicht.}$$

Beispiel 1

$$\text{Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ mit } a_n = 2n.$$

Betrachte die Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot n \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \\ &= n^2 + n \end{aligned}$$

Beachte:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (n^2 + n) = +\infty \qquad \text{divergent}$$

Beispiel 2

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ mit $q \in (-1, 1)$ (hier ist also $a_n = q^n$).

- Betrachte die Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = q^1 + q^2 + \ldots + q^n \quad \Big| \cdot q$$

$$q \cdot s_n = \underbrace{q^2 + q^3 + \ldots + q^n}_{=s_n - q} + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow q \cdot s_n = (s_n - q) + q^{n+1}$$

$$(q-1)s_n = -q + q^{n+1} \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$(1-q)s_n = q - q^{n+1} \Rightarrow \boxed{s_n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}}$$

- Bilde Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q - q^{n+1}}{1-q}, \text{ aber } \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \quad \text{da } q \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}$$

- Wir haben also die Konvergenz der Reihe gezeigt

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}}$$

$$\text{bsp. für } q = \frac{1}{3}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{das heisst } \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots = \frac{1}{2}$$

Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen

- **Satz:**

$$\text{Sei } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent, dann gilt } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

- **Korollar:**

$$\text{Falls } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ dann ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

- **Bemerkung:**
  Die obige Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist notwendig für die Konvergenz der Reihe, aber nicht hinreichend.

Beispiele

- $a_n = 2n$
  klar ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$, somit ist $\sum_{n=1}^{\infty}(2n)$ divergent

- $a_n = q^n$ mit $q = \frac{1}{3}$
  klar ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und wir wissen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ ist konvergent

- $a_n = \frac{1}{n}$
  wir wissen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen

- **Fazit:**
  Auch wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sowohl divergent als auch konvergent sein, beides ist möglich!!!

- **Praktischer Hinweis:**
  Um die Konvergenz einer Reihe $\sum a_n$ zu untersuchen, wird in einem ersten Schritt der Grenzwert der Reihenglieder a_n untersucht.

$$1)\ \text{Falls } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

$$2)\ \text{Falls } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \textit{alles} \text{ ist möglich}$$

Somit brauchen wir weitere Kriterien, um im Fall 2) die Entscheidung zu ermöglichen.

1) Vergleich mit einer konvergenten Reihe

Seien

$$0 \leq a_n \leq c_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist auch konvergent}$$

Konvergenzkriterien: Vergleich mit einer konvergenten Reihe

- Bemerkung: Wir brauchen konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ damit wir dieses Kriterium anwenden können.
- Gute Beispiele für konvergente Reihen:
  1.
  $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ konvergent für } q \in (-1, 1)$$
  2. Die (verallgemeinerte) harmonische Reihe
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergent falls } \alpha > 1$$

Beispiel 1

$$\text{Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad \left(\text{hier ist also } a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, die Reihe kann somit konvergent sein, muss aber nicht

b) $\underbrace{(n+1)}_{>n}\underbrace{(n+2)}_{>n} > n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$

Also ist $0 \leq a_n \leq c_n = \frac{1}{n^2}$. Gleichzeitig gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \infty$ ist konvergent.

Beispiel 2

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(0,7)^n|\sin(n)|$ (hier ist also $a_n = (0,7)^n \cdot \underbrace{|\sin(n)|}_{\leq 1}$)

Lösung:

$$0 \leq a_n \leq c_n = (0,7)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0,7)^n < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent.}$$

2) Quotientenkriterium

Satz:

falls $a_n \geq 0$ und falls der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = j$ existiert,

dann gilt

falls $j < 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist konvergent

falls $j > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist divergent

Bemerkung: Falls $j = 1$ ist keine Aussage möglich.
Es gibt Reihen, für die $j = 1$ gilt, welche konvergent sind, und es gibt Reihen, für die $j = 1$ gilt, welche divergent sind.

Beispiel

$$\text{Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \qquad (\text{hier ist also } a_n = \frac{1}{(2n)!})$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)(2n)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2(n+1))!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \text{ ist konvergent}$$

Bemerkung:

Vergleichs- oder Quotientenkriterium, je nach Erfahrung oder Situation!

Bisher wurden insbesondere Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ betrachtet.

Definition:
Eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ mit $b_n > 0$
heisst *alternierende Reihe.*
(d. h. die Vorzeichen der Reihenglieder $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ alternieren).

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}_{a_n} \qquad \text{hier ist also } b_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{1} = 1$$
$$a_2 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$a_3 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$a_4 = (-1)^5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

3) Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Satz:

Gegeben ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \qquad \text{mit } b_n > 0.$$

Falls gilt

a) $b_1 > b_2 > \ldots b_n > \ldots$ (die Folge $(b_n)_n$ ist fallend)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \quad \text{konvergent.}$$

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

heisst Potenzreihe d.h. a_n hat eine spezielle Form.
$a_n = c_n x^n$
$c_n = n$-ter Koeffizient der Potenzreihe

Bemerkungen:

1. Die Konvergenz der Reihe hängt von x ab ($x \in \mathbb{R}$).
2. Manchmal bezeichnet man auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ als eine Potenzreihe (mit x_0 fest).
3. Manchmal sind die Potenzreihen auch für $n = 0$ zu untersuchen d. h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$
4. Alle bisherigen Konvergenzkriteriterien für Reihen bleiben gültig für Potenzreihen.

Beispiel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{(hier ist } a_n = \frac{1}{n!} x^n \text{ und } c_n = \frac{1}{n!}\text{)}$$

Wir wenden Quotientenkriterium an

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{1}{n+1} x$$

$$\Rightarrow j = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} x = 0 < 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Potenzreihen

Das heisst für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ konvergent.

$$f : x \mapsto \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}_{f(x)} \Rightarrow f(x) = e^x$$

Potenzreihen von Funktionen:

Gegeben: Funktion $f(x)$
Frage: Kann die Funktion f mit einer Potenzreihe in Verbindung gebracht werden?

$$f(x) \sim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

oder

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Kanonischer Weg: Sei f in x_0 unendlich oft differenzierbar.

- $c_0 = f(x_0)$
- $c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$
- $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$
- $c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$
- allgemein für alle $n \geq 0 : c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
- x_0 ist fest, heisst Entwicklungspunkt
- Betrachte die Potenzreihe (für f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Beispiel

$$f(x) = e^x \qquad x_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-0)^n$$

Koeffizienten c_n bestimmen:

$$c_0 = f(0) = e^0 = 1$$

$$c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1!} = 1$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2!} = \frac{1}{2}$$

allgemein: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{e^0}{n!} = \dfrac{1}{n!}$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

Definition

- Gegeben Funktion $f(x)$.

  Die zu f zugeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ mit

  $$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

  heisst Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt x_0.
- Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ konvergent ist, heisst **Konvergenzbereich** der Reihe.

Satz 1
Gegeben die vorherige Potenzreihe.
$\Rightarrow$ Es existiert ein $r > 0$ (r heisst Konvergenzradius) sodass
a) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x_0 - r < x < x_0 + r$ konvergiert die Reihe
b) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < x_0 - r$ oder $x > x_0 + r$ divergiert die Reihe.

Bemerkung:
Falls $x = x_0 - r$ oder $x = x_0 + r$ sind keine Aussagen möglich.

Satz 2 (Bestimmen des Konvergenzradius):

Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ lässt sich wie folgt berechnen

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Vorgehen beim Bestimmen der Konvergenz von Potenzreihen:

- bestimme r mit Satz 2
- wende Satz 1 an
- untersuche $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ für $x = x_0 - r$ und $x = x_0 + r$ direkt

Beispiel 1
Untersuchen Sie folgende Potenzreihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (x-0)^n$$

- hier ist $x_0 = 0$ und $c_n = 1$ für alle n
- der Konvergenzradius ist $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1$
- Satz 1 anwenden:
  Für $0-1 < x < 0+1$, d.h. $-1 < x < 1$ ist die Reihe konvergent.
  Für $x < -1$ und $x > 1$ ist die Reihe divergent.
- Sei nun $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \implies \text{für } x = 1 \text{ ist die Reihe divergent}$$

- Sei nun $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = ??$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow s_1 &= (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \\
s_2 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1 \\
s_2 &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 0 \\
s_n &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

s_n besitzt also keinen Grenzwert und somit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x = -1$ divergent.

Fazit:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist konvergent genau dann, wenn $-1 < x < 1$.

$\Rightarrow$ vergleiche mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad q \in (-1, 1)$

Beispiel 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

Hier ist $x_0 = 0$
und $c_n = \frac{1}{n!}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$ der Konvergenzradius ist unendlich!

Das bedeutet für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Später: $f(x) = e^x$

Beispiel 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}_{c_n}\cdot(x-1)^n$$

$x_0 = 1$
$c_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|}{\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \Rightarrow r = 1$$

$\Rightarrow$ Für $1-1 < x < 1+1$ also $0 < x < 2$ ist die Reihe konvergent.

$\Rightarrow$ Für $x < 0$ oder $x > 2$ ist die Reihe divergent.

Fortsetzung:

$$x = 0: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot (0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergent } \left(\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \text{konvergent nur falls } \alpha > 1 \right)$$

$$x = 2: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot (2-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad \text{alternierende Reihe}$$

konvergent gemäss Kriterium für altern. Reihen mit $b_n = \dfrac{1}{n}$

$$\to b_1 > b_2 > \ldots > b_n \ldots \to \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

$\Rightarrow$ Reihe ist konvergent für $x \in (0, 2]$

Frage: Wann gilt Gleichheit in

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots \quad ?$$

- Gegeben f und $x_0 \in D$ im Definitionsbereich von f:

$$\begin{aligned} c_0 &= f(x_0) \\ c_1 &= \frac{f'(x_0)}{1!} \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \dots \end{aligned}$$

- Betrachte die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt x_0, also

$$\underbrace{f(x_0)}_{c_0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_{c_1}(x-x_0)^1 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{c_2}(x-x_0)^2 + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{c_n}(x-x_0)^n + \dots$$

- Wende Konvergenzkriterien für Potenzreihen an (es existiert ein $r > 0$, $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, sodass für $x_0 - r < x < x_0 + r$ die Reihe konvergent und für $x < x_0 - r$ oder $x > x_0 + r$ divergent ist)

Beispiel 1:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1,1) \quad x_0 = 0$$

Wir wissen: Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$, somit ist sie konvergent für $x \in (-1,1)$.

Weiter wissen wir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$

da $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-x}$ für $-1 < x < 1$.

Bemerkung:
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ hat eine Darstellung als Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Diese Reihe **ist** die Taylor-Reihe von f um 0: Man rechnet leicht nach, dass $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$ gilt.

Natürlich ist $f(x) = \frac{1}{1-x}$ definiert für alle $x \neq 1$.
Jedoch ist für $x < -1$ oder $x > 1$ die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

nicht möglich.

Beispiel 2:

Beweisen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ eine Entwicklung als Potenzreihe wie folgt besitzt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

- Gegeben $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$. Bestimme die Taylorkoeffizienten.

$$c_0 = f(0) = e^0 = 1$$

$$c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1!} = \frac{1}{1!}$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

- Betrachte die Taylor-Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

- Untersuchung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
  Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ ist konvergent für alle } x \in (-\infty, \infty).$$

somit ist $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ für alle x

- **Fazit:** Für alle $x \in \mathbb{R}$:
  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$
  $e^1 \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1^4 + \frac{1}{5!} \cdot 1^5 \approx 2,716$
  Fehler der Abschätzung $= |e - 2,716| \approx 0,002$.
  Je höher n desto genauer die Approximation.

Bemerkung:

Ersetze $x \longmapsto -x$:

$$e^{-x} = 1 + \frac{1}{1!}(-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(-x)^n + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}(-1)^n}_{c_n} \cdot x^n$$

Ersetze $x \longmapsto x^2$:

$$e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(x^2) + \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x^2)^n + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

Bemerkung:
Bisherige Entwicklung um $x_0 = 0$.

Beispiel:
$f(x) = \ln(x)$ (definiert nur für $x > 0$).
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f um $x_0 = 1$

Lösung:
die Taylor-Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = \ln 1 = 0 \qquad c_0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \qquad c_1 = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1 \qquad c_2 = \frac{f''(1)}{2!} = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \qquad c_3 = \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f''''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \qquad f''''(1) = \frac{-6}{1} = -6 \qquad c_4 = \frac{f''''(1)}{4!} = -\frac{2 \cdot 3}{4!} = -\frac{1}{4}$$

Somit: $c_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$

- Taylor-Reihe von $f(x) = \ln x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

  $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot (x-1)^n}$ Taylor-Reihe für den Logarithmus

- **Bestimme den Konvergenzradius der Taylor-Reihe für den Logarithmus:**

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}}{(-1)^{n+2} \frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Also:

- Für $1 - 1 < x < 1 + 1$ also für $0 < x < 2$ ist die Taylor-Reihe für den Logarithmus konvergent.
- Für $x > 2$ ist die Reihe divergent.

Noch zu untersuchen: Das Verhalten der Reihe für $x = 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot(2-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, weil sie eine

alternierende Reihe der Form $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot b_n$

mit $b_n = \dfrac{1}{n}$ und $\begin{cases} b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$ ist

- **Fazit**

  Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n$ ist konvergent falls $x \in (0,2]$

- Also gilt:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n \qquad \text{für } x \in (0,2]$$

- **Anwendung:**

$$\text{für } x = 2: \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\ln(2) \approx (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{1} + (-1)^{2+1} \cdot \frac{1}{2} + (-1)^{3+1} \cdot \frac{1}{3} + (-1)^{4+1} \cdot \frac{1}{4}$$

- **Stammfunktion von** $e^{-x^2} = f(x)$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = -t^2$$

$$\Rightarrow e^{-t^2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-t^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-t^2\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(-t^2\right)^n + \ldots$$

Somit

$$\int_0^x e^{-t^2} dx \approx \int_0^x \left(1 + \frac{1}{1!}\left(-t^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-t^2\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(-t^2\right)^n\right) dt$$

$$= \; t\Big|_0^x + \frac{1}{1!} \cdot \frac{-t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{t^5}{5}\Big|_0^x + \ldots + \frac{1}{n!}(-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x$$

$$= x + \frac{1}{1!} \cdot \frac{-x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1}{n}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Die Stammfunktion von e^{-x^2} ist darstellbar durch eine Reihe; längere Überlegungen notwendig.

Satz:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1 \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergent.

Beweis:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \ln x \Big|_1^\lambda & \alpha = 1 \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^\lambda & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} [\ln\lambda - \ln 1] & \alpha = 1 \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\left(\lambda^{1-\alpha} - 1\right)\right] & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \alpha > 1 \end{cases}$$