Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I
Herbstsemester 2018
Kapitel 7: Komplexe Zahlen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

7. Komplexe Zahlen
- Definition einer komplexen Zahl
- Die Gauss'sche Zahlenebene
- Weitere Grundbegriffe
- Betrag einer komplexen Zahl
- Darstellungformen einer komplexen Zahl
- Die vier Grundrechenarten für komplexe Zahlen
  - Vorbetrachtungen
  - Addition und Subtraktion
  - Multiplikation
  - Division
- Potenzieren und Wurzelziehen
  - Potenzieren
  - Wurzelziehen
  - Die n-te Wurzel aus a

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 640 - 681,**
  Seiten 714 - 717 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Definition einer komplexen Zahl

Wir gehen bei unseren Betrachtungen von der einfachen *quadratischen* Gleichung aus:

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

In $\mathbb{R}$ gibt es keine Lösung, aber wir erhalten zwei *formale* Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

Definition

Der formale Wurzelausdruck $\sqrt{-1}$ heisst **imaginäre Einheit** und wird durch das Symbol **j** gekennzeichnet:

$$j = \sqrt{-1}$$

Das Quadrat der imaginären Einheit j ist die reelle Zahl -1:

$$j^2 = \ -1$$

Definition einer komplexen Zahl

Anmerkungen:

- In der Mathematik wird die imaginäre Einheit meist durch das Symbol i gekennzeichnet.
- Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ sind dann $x = \pm j$. Sie können als Produkte aus der *reellen Zahl* $+1$ oder -1 und der *imaginären Einheit* j aufgefasst werden:

$$x_1 = 1 \cdot j = j \text{ und } x_2 = -1 \cdot j = -j$$

- Auf ähnliche "Zahlen" stossen wir beim formalen Lösen der Gleichung

$$x^2 + 9 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3j$$

Definition

Unter einer imaginären Zahl bj versteht man das formale Produkt aus der reellen Zahl $b \neq 0$ und der imaginären Einheit j.

Definition einer komplexen Zahl

Bei *quadratischen* Gleichungen treten häufig auch formale Lösungen in Form einer *algebraischen Summe* aus einer *reellen* Zahl und einer *imaginären* Zahl auf. So besitzt beispielweise die Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

die *formalen* Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3j.$$

Definition

Unter einer *komplexen* Zahl z versteht man die formale Summe aus einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl jy:

$$z = x + jy$$

Definition einer komplexen Zahl

- *Komplexe* Zahl bedeutet soviel wie *zusammengesetzte* Zahl, nämlich aus einer reellen *und* einer imaginären Zahl zusammengesetzt.
- Die Darstellungsform $z = x + jy$ ist die *Normalform* einer komplexen Zahl. Sie wird auch als *algebraische* oder *kartesische* Form bezeichnet.
- Die reellen Bestandteile x und y der komplexen Zahl $z = x + jy$ werden als *Realteil* und *Imaginärteil* von z bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

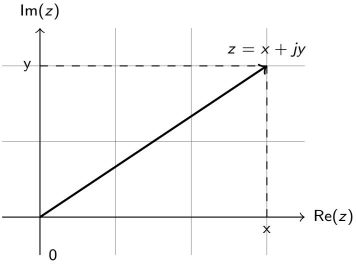
$$\begin{aligned} \textit{Realteil} \text{ von } z: &\quad Re(z) = x \\ \textit{Imaginärteil} \text{ von } z: &\quad Im(z) = y \end{aligned}$$

- Die Menge

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + jy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

heisst *Menge der komplexen Zahlen*.

Die Gauss'sche Zahlenebene



Geometrische Darstellung einer komplexen Zahl in der Gauss'schen Zahlenebene

Eine *komplexe* Zahl $z = x + jy$ lässt sich in der *Gauss'schen Zahlenebene* durch den *Bildpunkt* $P(z) = (x; y)$ oder durch den *Zeiger* $\underline{z} = x + jy$ geometrisch darstellen. Die Bildpunkte der *reellen* Zahlen liegen dabei auf der *reellen Achse*, die Bildpunkte der *imaginären* Zahlen auf der *imaginären* Achse.

Weitere Grundbegriffe

Gleichheit zweier komplexer Zahlen

Definition

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ heissen *gleich* (schreibe $z_1 = z_2$), falls

$$x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

gilt, d.h. falls z_1 und z_2 den gleichen Realteil sowie den gleichen Imaginärteil besitzen.

Konjugiert komplexe Zahl

Definition

Die komplexe Zahl

$$z^* = x - jy$$

heisst die zu $z = x + jy$ *konjugiert komplexe* Zahl.

Weitere Grundbegriffe

Anmerkungen:

- Für zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen z_1 und z_2 gilt

$$z_1 = z_2^* \quad \text{und} \quad z_1^* = z_2.$$

- Es ist stets $(z^*)^* = z$.
- Eine komplexe Zahl z mit der Eigenschaft $z^* = z$ ist *reell*, also $z \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

$$\begin{aligned} z_1 &= 7 + 3j & \Rightarrow \quad z_1^* &= 7 - 3j \\ z_2 &= -4 - 5j & \Rightarrow \quad z_2^* &= -4 + 5j \\ z_3 &= -9j & \Rightarrow \quad z_3^* &= 9j \\ z_4 &= 8 & \Rightarrow \quad z_4^* &= 8 \end{aligned}$$

Betrag einer komplexen Zahl

Definition

Unter dem *Betrag* $|z|$ der komplexen Zahl $z = x + jy$ versteht man die Länge des zugehörigen Zeigers:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3 - 4j & \Rightarrow \quad |z_1| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\
z_2 &= 3j & \Rightarrow \quad |z_2| &= \sqrt{0^2 + 3^2} = 3 \\
z_3 &= -2 - 8j & \Rightarrow \quad |z_3| &= \sqrt{2^2 + 8^2} \approx 8.25 \\
z_4 &= 10 & \Rightarrow \quad |z_4| &= \sqrt{10^2 + 0^2} = 10
\end{aligned}$$

Darstellungformen einer komplexen Zahl

- Algebraische or kartesische Form
  $z = x + jy$
- Trigonometrische Form
  Eine komplexe Zahl $z = x + jy$ können wir auch durch *Polarkoordinaten* $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ festlegen: Mithilfe der Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\phi) \\ y &= r \cdot \sin(\phi) \end{aligned}$$

lässt sich die komplexe Zahl z in der *kartesischen* Darstellung in die sogenannte *trigonometrische* Darstellung

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ &= r \cdot \cos(\phi) + j \cdot r \cdot \sin(\phi) \\ &= r \cdot (\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi)) \end{aligned}$$

überführen.

Darstellungform einer komplexen Zahl

- Bezeichnungen für r und ϕ in der komplexen Analysis:

  r: Betrag von z
  ϕ: *Argument*, *Winkel*, oder *Phase* von z

- Die zu $z = r \cdot (\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi))$ *konjugiert* komplexe Zahl z^* lautet daher in der *trigonometrischen* Darstellungsform

$$\begin{aligned} z^* &= r \cdot (\cos(\phi) - j \cdot \sin(\phi)) \\ &= r \cdot (\cos(-\phi) + j \cdot \sin(-\phi)) \\ &= r \cdot (\cos(2\pi - \phi) + j \cdot \sin(2\pi - \phi)) \end{aligned}$$

  Hier gibt es eine geometrische Interpretation!

Beispiele:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos(30^\circ) + j\sin(30^\circ)) \\ z_2 &= 5(\cos(\pi) + j\sin(\pi)) \\ z_3 &= 4(\cos(45^\circ) + j\sin(45^\circ)) \end{aligned}$$

Darstellungform einer komplexen Zahl

- Unter Verwendung der von Euler stammenden Formel

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi)$$

erhält man aus der *trigonometrischen* Darstellung $z = r(\cos(\phi) + j\sin(\phi))$ die als *Exponentialform* bezeichnete (knappe) Darstellungsform

$$z = r \cdot e^{j\phi}.$$

- Beispiele:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \cdot e^{j45^\circ} \\ z_2 &= 8,2 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi} \\ z_3 &= 2,7 \cdot e^{j\frac{3}{2}\pi} \\ z_4 &= 1,4 \cdot e^{j250^\circ} \end{aligned}$$

Zusammenfassung der verschiedenen Darstellungsformen

Darstellungsformen einer komplexen Zahl

- Algebraische oder kartesische Form

$$z = x + jy$$

$x \in \mathbb{R}$: *Realteil* von z
$y \in \mathbb{R}$: *Imaginärteil* von z

- Trigonometrische Form

$$z = r \cdot (\cos(\phi) + j \sin(\phi))$$

$r \geq 0$: *Betrag* von z
$\phi \in [0, 2\pi)$: *Argument* (*Winkel*) von z

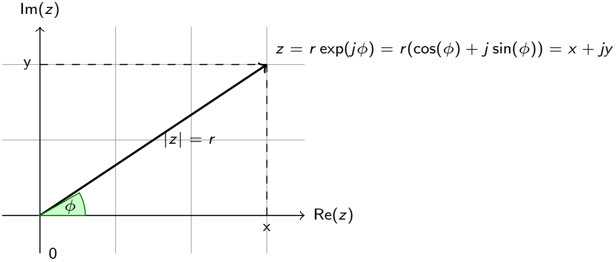
Zusammenfassung der verschiedenen Darstellungsformen

Darstellungsformen einer komplexen Zahl

- Exponentialform

$$z \quad = \quad r \cdot \exp(j\phi)$$

$r \geq 0$: *Betrag* von z
$\phi \in [0, 2\pi)$: *Argument* (*Winkel*) von z



Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Umrechnung einer komplexen Zahl: Polarform →Kartesische Form

Eine in der *Polarform* $z = r(\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi))$ oder $z = r \cdot \exp(j\phi)$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$x = r \cdot \cos(\phi) \ , \ y = r \cdot \sin(\phi)$$

in die *kartesische* Form $z = x + j \cdot y$ überführen.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
z_1 = 2(\cos(30^\circ) + j \cdot \sin(30^\circ)) &= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2}) = \sqrt{3} + j \\
z_2 = 5(\cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi)) &= 5(-1 + j \cdot 0) = -5 \\
z_3 = 3\exp(j \cdot 3\pi/4) &= 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-3\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Umrechnung einer komplexen Zahl: Kartesische Form → Polarform

Umrechnung einer komplexen Zahl: Kartesische Form → Polarform

Eine in der *kartesischen* Form $z = x + j \cdot y$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \tan(\phi) = \frac{y}{x}$$

und unter Berücksichtigung des Quadraten, in dem der zugehörige Bildpunkt liegt, in die *trigonometrische* Form $z = r(\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi))$ bzw. in die *Exponentialform* $z = r \cdot \exp(j\phi)$ überführen.

Umrechnung einer komplexen Zahl: Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform

Eine erste Transformation

- Für $x > 0$, $y \geq 0$ verwenden wir: $\phi = arctan(\frac{y}{x})$
- Für $x > 0$, $y < 0$ verwenden wir: $\phi = arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi$
- Für $x < 0$, verwenden wir: $\phi = arctan(\frac{y}{x}) + \pi$
- Für $x = 0$, verwenden wir:
  - $\phi = \pi/2$ für $y > 0$
  - $\phi = 3\pi/2$ für $y < 0$

Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform: Beispiel

Beispiel

$$z = \underbrace{1}_{=x>0} + \underbrace{\sqrt{3}}_{=y>0} j$$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \phi = arctan(\frac{y}{x}) = arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Also $\boxed{z = 2 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}$

Kartesische Form → Polarform: Beispiel

Beispiel Für

$$\begin{aligned} z_1 &= 3+4j \\ z_2 &= -8-6\cdot j \end{aligned}$$

finden wir:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{3^2+4^2} = 5 \\ \phi_1 &= \arctan(\frac{4}{3}) = 0.927 \\ r_2 &= \sqrt{(-8)^2+(-6)^2} = 10 \\ \phi_2 &= arctan(\frac{-6}{-8}) + \pi = 0,644 + \pi = 3.785 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\,(\cos(\phi_1) + j\sin(\phi_1)) = r_1 e^{j\phi_1} \\ z_2 &= r_2\,(\cos(\phi_2) + j\sin(\phi_2)) = r_2 e^{j\phi_2}. \end{aligned}$$

Umrechnung einer komplexen Zahl: Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform

Eine andere mögliche Umrechnungsformel

- Für $y \geq 0$, verwenden wir: $\phi = arc\cos(\frac{x}{r})$
- Für $y < 0$, verwenden wir: $\phi = 2\pi - arc\cos(\frac{x}{r})$
- Anmerkung: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

7. Komplexe Zahlen

- Definition einer komplexen Zahl
- Die Gauss'sche Zahlenebene
- Weitere Grundbegriffe
- Betrag einer komplexen Zahl
- Darstellungformen einer komplexen Zahl
- Die vier Grundrechenarten für komplexe Zahlen
  - Vorbetrachtungen
  - Addition und Subtraktion
  - Multiplikation
  - Division
- Potenzieren und Wurzelziehen
  - Potenzieren
  - Wurzelziehen
  - Die n-te Wurzel aus a

Die vier Grundrechenarten für komplexe Zahlen: Vorbetrachtungen

Auf der Zahlenmenge $\mathbb{C}$ lassen sich - wie bei den reellen Zahlen - vier Rechenoperationen, die sog. *Grundrechenarten* erklären. Es sind dies

- *Addition* $(+)$
- *Subtraktion* (-) *als Umkehrung der Addition*
- *Multiplikation* $(\cdot)$
- *Division* (:) *als Umkehrung der Multiplikation*

Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, müssen die vier Grundrechenarten so definiert werden, dass die Rechenregeln für *komplexe* Zahlen im Reellen mit den bereits bestehenden Rechenregeln für *reelle* Zahlen *übereinstimmen* (sog. *Permanenzprinzip*).

Definition von Addition und Subtraktion

Die Rechenoperationen *Addition* und *Subtraktion* sind in der *kartesischen* Darstellungsform wie folgt definiert:

Definition

Summe $z_1 + z_2$ und *Differenz* $z_1 - z_2$ zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ werden nach den folgenden Vorschriften gebildet:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2)$$

Beispiele

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 - 5 \cdot j \\ z_2 &= 2 + 11 \cdot j \\ z_1 + z_2 &= (4 + 2) + (-5 + 11) \cdot j = 6 + 6 \cdot j \\ z_1 - z_2 &= (4 - 2) + (-5 - 11) \cdot j = 2 - 16 \cdot j \end{aligned}$$

Definition der Multiplikation

Definition

Unter dem *Produkt* $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ wird die komplexe Zahl

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

verstanden.

Beispiele

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2 - 4 \cdot j \\
z_2 &= -3 + 5 \cdot j \\
z_1 \cdot z_2 &= (2 - 4 \cdot j) \cdot (-3 + 5 \cdot j) \\
&= (2 \cdot (-3) - (-4) \cdot 5) + j \cdot (2 \cdot 5 + (-4) \cdot (-3)) \\
&= (-6 + 20) + j \cdot (10 + 12) \\
&= 14 + 22 \cdot j
\end{aligned}$$

Multiplikation: Anmerkungen

- *Formal* erhalten wir das *gleiche* Ergebnis, wenn wir das Produkt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 + j \cdot y_2)$$

wie im Reellen *gliedweise* ausmultiplizieren und dabei die Beziehung

$$j^2 = -1$$

beachten:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 + j \cdot y_2) \\ &= x_1 x_2 + j \cdot (x_1 y_2) + j(x_2 y_1) + j^2 (y_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

- Beispiel

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 - 4 \cdot j \ , \quad z_2 = -3 + 5 \cdot j \\ z_1 \cdot z_2 &= (2 - 4 \cdot j) \cdot (-3 + 5 \cdot j) \\ &= -6 + 10 \cdot j + 12 \cdot j - 20 j^2 \\ &= 14 + 22 \cdot j \end{aligned}$$

Multiplikation: Anmerkungen

- Wir berechnen die ersten *Potenzen* von j:

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 \\ j^3 &= j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j \\ j^4 &= j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

$$j^{k+4n} = j^k \cdot j^{4n} = j^k \cdot (j^4)^n = j^k \cdot (1)^n = j^k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

- Wir berechnen das *Produkt* aus z und z^* und erhalten:

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= (x + j \cdot y) \cdot (x - j \cdot y) \\ &= x^2 - j \cdot xy + j \cdot xy - j^2 \cdot y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Division, Umkehrung der Multiplikation

Wir beschäftigen uns nun mit der *Umkehrung der Multiplikation, der Division*. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$z \cdot z_2 = z_1$$

mit *vorgegebenen* Zahlen $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ $(z_2 \neq 0)$. Die Unbekannte ist $z = x + j \cdot y$.
Die Gleichung umgeformt ergibt

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Wir wollen nun die Lösung $z = x + j \cdot y$ berechnen.

$$\begin{aligned} z \cdot z_2 &= (x + j \cdot y) \cdot (x_2 + j \cdot y_2) \\ &= xx_2 - yy_2 + j \cdot (xy_2 + yx_2) \\ & \text{und} \\ z_1 &= x_1 + j \cdot y_1 \end{aligned}$$

Division, Umkehrung der Multiplikation

Diese Gleichung kann jedoch nur bestehen, wenn beide Seiten sowohl in ihrem Realteil als auch in ihrem Imaginärteil übereinstimmen:

$$xx_2 - yy_2 = x_1$$
$$xy_2 + yx_2 = y_1$$

Dieses *lineare Gleichungssystem* mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten (nämlich x und y) besitzt *genau eine* Lösung, wenn die Determinante D von null *verschieden* ist:

$$D = x_2^2 + y_2^2 \neq 0 \text{ also, wenn } z_2 \neq 0$$

Dann finden wir die Lösung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ y &= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Definition der Division

Definition

Unter dem *Quotient* z_1/z_2 zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ wird die komplexe Zahl

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

verstanden.

Anmerkung:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \\ &= \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \end{aligned}$$

Division: Beispiele

Beispiel:

Mit $z_1 = 4 - 8 \cdot j$ und $z_2 = 3 + 4 \cdot j \neq 0$ berechnen wir den *Quotienten* z_1/z_2:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{4 - 8 \cdot j}{3 + 4 \cdot j} = \frac{(4 - 8 \cdot j)(3 - 4 \cdot j)}{(3 + 4 \cdot j)(3 - 4 \cdot j)} \\
&= \frac{(4 - 8 \cdot j)(3 - 4 \cdot j)}{3^2 + 4^2} \\
&= \frac{12 - 16 \cdot j - 24 \cdot j + 32 \cdot j^2}{25} \\
&= \frac{-20 - 40 \cdot j}{25} \\
&= \frac{-4 - 8 \cdot j}{5}
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Mit $z_1 = 1 + j \cdot \sqrt{3}$ und $z_2 = 1 + j \neq 0$ berechnen wir den *Quotienten* z_1/z_2:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+\sqrt{3}j}{1+j} = \frac{(1+\sqrt{3}j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3}j)(1-j)}{1^2+(+1)^2} \\
&= \frac{1-j+\sqrt{3}j-\sqrt{3}j^2}{2} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})j}{2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) j
\end{aligned}$$

Division: Beispiele

Beispiel:

Bestimmen Sie alle Zahlen $m \in \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{-1 + m \cdot j}{\sqrt{3} + j} \in \mathbb{R} \qquad (z = a + bj \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0)$$

- Schritt 1: Wir betrachten den Ausdruck als Division der komplexen Zahlen $z_1 = -1 + m \cdot j$ und $z_2 = \sqrt{3} + j$ und rechnen aus

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + m \cdot j}{\sqrt{3} + j} = \frac{(-1 + mj)(\sqrt{3} - j)}{(\sqrt{3} + j)(\sqrt{3} - j)} = \frac{-\sqrt{3} + j + m \cdot \sqrt{3}j - mj^2}{(\sqrt{3})^2 - j^2}$$

$$= \frac{(-\sqrt{3} + m) + (1 + m\sqrt{3})j}{4} = \frac{-\sqrt{3} + m}{4} + \frac{1 + m\sqrt{3}}{4}j$$

- Schritt 2:

$$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1 + m\sqrt{3}}{4} = 0 \Leftrightarrow 1 + m\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Multiplikation und Division in trigonometrischer und exponentieller Darstellung

Multiplikation und Division sind in der trigonometrischen bzw. exponentiellen Schreibweise besonders einfach durchführbar.
Mit

$$z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + j \cdot \sin(\phi_1))$$

und

$$z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + j \cdot \sin(\phi_2))$$

erhalten wir :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2[\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \\ &+ j(\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \sin(\phi_1)\cos(\phi_2))] \end{aligned}$$

Multiplikation und Division in trigonometrischer und exponentieller Darstellung

Unter Verwendung der *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cos(\phi_1+\phi_2) &= \cos(\phi_1)\cos(\phi_2)-\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\\ \sin(\phi_1+\phi_2) &= \sin(\phi_1)\cos(\phi_2)+\sin(\phi_2)\cos(\phi_1)\ .\end{aligned}$$

folgt hieraus weiter

$$z_1\cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2)+j\cdot\sin(\phi_1+\phi_2))$$

oder - in der kürzeren *Exponentialform* - :

$$z_1\cdot z_2 = r_1 r_2(\exp(j\cdot(\phi_1+\phi_2))$$

Eine analoge Rechnung liefert für den *Quotienten* zweier komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1-\phi_2)+j\sin(\phi_1-\phi_2))\\ &= \frac{r_1}{r_2}\exp(j\cdot(\phi_1-\phi_2))\end{aligned}$$

Multiplikation und Division in trigonometrischer und exponentieller Darstellung

Definition

Bei der *Multiplikation* und *Division* zweier komplexer Zahlen erweist sich die *trigonometrische* bzw. *exponentielle* Darstellungsweise als besonders vorteilhaft. Mit

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos(\phi_1) + j \cdot \sin(\phi_1)) = r_1 \exp(j \cdot \phi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos(\phi_2) + j \cdot \sin(\phi_2)) = r_2 \exp(j \cdot \phi_2) \end{aligned}$$

gilt dann für die Multiplikation und die Division:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + j \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2)) = r_1 r_2 \exp(j \cdot (\phi_1 + \phi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + j \cdot \sin(\phi_1 - \phi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \exp(j \cdot (\phi_1 - \phi_2)) \end{aligned}$$

Beispiel:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}j = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = -1 + j \quad \text{(2. Quadrant)}$$

- 1. Schritt: Polardarstellung:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \arctan\frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

- 2. Schritt: Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+j\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)+j\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right)$$
$$= \underline{\underline{\sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+j\sin\left(2\pi-\frac{5\pi}{12}\right)\right)}}$$

Geometrische Deutung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Geometrische Deutung

Die *Multiplikation* einer komplexen Zahl $z_1 = r_1 \exp(j\phi_1)$ mit der komplexen Zahl $z = r \exp(j\phi)$ bedeutet geometrisch eine *Drehstreckung* des Zeigers z_1 . Dabei wird der Zeiger z_1 *nacheinander* den folgenden geometrischen Operationen unterworfen:

1. *Streckung* um das r-fache
2. *Drehung* um den Winkel ϕ im *positiven* Drehsinn (für $\phi > 0$)

Das Ergebnis ist das geometrische Bild des *Produktes* $z \cdot z_1$

Geometrische Deutung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen

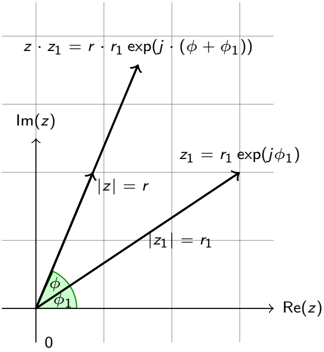


Figure: Die *Multiplikation* einer komplexen Zahl $z_1 = r_1 \exp(j\phi_1)$ mit der komplexen Zahl $z = r \exp(j\phi)$

Geometrische Deutung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Anmerkungen

- Da die Multiplikation eine *kommutative* Rechenoperation ist ($z_1 \cdot z = z \cdot z_1$), kann man bei der geometrischen Konstruktion des Produktes $z_1 \cdot z$ auch vom Zeiger z ausgehen.
- Die *Division* zweier komplexer Zahlen lässt sich auf die *Multiplikation* zurückführen. So bedeutet der *Quotient* z_1/z das *Produkt* aus z_1 und dem *Kehrwert* von z:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z} &= z_1 \cdot \frac{1}{z} \\
&= (r_1 e^{j\phi_1}) \cdot \frac{1}{re^{j\phi}} \\
&= (r_1 e^{j\phi_1}) \cdot (\frac{1}{r} e^{-j\phi})
\end{aligned}
$$

Geometrische Deutung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Beispiele

Mit $z_1 = 2 \cdot e^{j30^\circ}$, $z_2 = 3 \cdot e^{j80^\circ}$, $z_3 = 4 \cdot e^{j140^\circ}$, gilt

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (2 \cdot 3) e^{j(30^\circ + 80^\circ)} = 6 e^{j110^\circ} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3} e^{j(30^\circ - 80^\circ)} = \frac{2}{3} e^{-j50^\circ} = \frac{2}{3} e^{j(360^\circ - 50^\circ)} = \frac{2}{3} e^{j310^\circ} \\
\frac{z_3}{z_1} &= \frac{4}{2} e^{j(140^\circ - 30^\circ)} = 2 e^{j110^\circ}
\end{aligned}$$

Grundgesetze für komplexe Zahlen (Zusammenfassung)

Eigenschaften der Menge der komplexen Zahlen

- *Summe* $z_1 + z_2$, *Differenz* $z_1 - z_2$, *Multiplikation* $z_1 \cdot z_2$, *Division* z_1/z_2 zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 ergeben wiederum eine *komplexe* Zahl. *Ausnahme:* Die Division durch die Zahl 0 ist *nicht* erlaubt.
- *Addition* und *Multiplikation* sind *kommutative* Rechenoperationen. Für beliebige Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt stets:

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 & = & z_2 z_1 \end{array}\right\} \textit{Kommutativgesetze}$$

Grundgesetze für komplexe Zahlen (Zusammenfassung)

Eigenschaften der Menge der komplexen Zahlen

- *Addition* und *Multiplikation* sind *assoziative* Rechenoperationen. Für beliebige Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt stets:

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1 + (z_2 + z_3) & = & (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) & = & (z_1 z_2) z_3 \end{array}\right\} \textit{Assoziativgesetze}$$

- *Addition* und *Multiplikation* sind über das *Distributivgesetz* miteinander verbunden:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \textit{Distributivgesetz}$$

7. Komplexe Zahlen
- Definition einer komplexen Zahl
- Die Gauss'sche Zahlenebene
- Weitere Grundbegriffe
- Betrag einer komplexen Zahl
- Darstellungformen einer komplexen Zahl
- Die vier Grundrechenarten für komplexe Zahlen
  - Vorbetrachtungen
  - Addition und Subtraktion
  - Multiplikation
  - Division
- Potenzieren und Wurzelziehen
  - Potenzieren
  - Wurzelziehen
  - Die n-te Wurzel aus a

Potenzieren: Definition

Potenzieren einer komplexen Zahl

Eine in der Polarform vorliegende komplexe Zahl z wird nach der *Formel von Moivre* potenziert ($n \in \mathbb{N}$):

- *In exponentieller Schreibweise:*

$$z^n = \left[r \cdot e^{j\phi}\right]^n = r^n \cdot e^{jn\phi}$$

- *In trigonometrischer Schreibweise:*

$$z^n = [r \cdot (\cos(\phi) + j\sin(\phi))]^n = r^n \cdot (\cos(n\phi) + j\sin(n\phi))$$

Regel: Eine komplexe Zahl $z = r \cdot (\cos(\phi) + j\sin(\phi)) = r \cdot e^{j\phi}$ wird in die *n-te Potenz* erhoben, indem man ihren Betrag r in die *n-te Potenz* erhebt und ihr Argument (Winkel) ϕ mit dem Exponenten *n multipliziert*.

Potenzieren: Beispiele

Beispiel

Wir erheben die komplexe Zahl $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ in die 3. Potenz:

$$
\begin{aligned}
z^3 &= \left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^3 \\
&= 2^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2^3\left(\cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi)\right) \\
&= 8(-1 + j \cdot 0) \\
&= -8
\end{aligned}
$$

Potenzieren: Beispiele

Beispiel:

$$z = -1 + j \quad \Rightarrow \quad z^4 = ?$$

Mit Polardarstellung:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} z^4 &= \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\cos\left(4 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(4 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4 \cdot (\cos(3\pi) + j\sin(3\pi)) \\ &= 4 \cdot (\cos\pi + j\sin\pi)) \\ &= 4 \cdot (-1) = \underline{\underline{-4}} \end{aligned}$$

Potenzieren: Beispiele

Beispiel:

$$z = -\sqrt{3} - j \quad \Rightarrow \quad z^6 = ?$$

Zunächst bringen wir z auf die Polarform:

$\mathrm{Re} z = -\sqrt{3}$

$\mathrm{Im} z = -1$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$\boxed{z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2e^{j\frac{7\pi}{6}}}$$

Potenzieren: Beispiele

Fortsetzung

$$
\begin{aligned}
z^6 &= 2^6 \left(\cos\left(6 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) + j \sin\left(6 \cdot \frac{7\pi}{6}\right)\right) \\
&= 64 \cdot (\cos(7\pi) + j \sin(7\pi)) \\
&= 64 \cdot (\cos\pi + j \sin\pi) \\
&= 64 \cdot (-1 + 0j) \\
&= \underline{\underline{-64}}
\end{aligned}
$$

Potenzieren: Beispiele

Beispiel:

$$z = 1.2 - 2.5j \quad \Rightarrow \quad z^6 = ?$$

Zunächst bringen wir z auf die Polarform:

$$r = \sqrt{1.2^2 + 2.5^2} = 2.7731$$

$$tan(\phi) = -\tfrac{2.5}{1.2} = -2.0833 \Rightarrow \phi = arctan(-2.0833) + 2\pi = 5.160$$

Daher ist

$$z = 1.2 - 2.5j = 2.7731e^{j \cdot 5.160}$$

und nach der *Formel von Moivre* folgt weiter:

$$\begin{aligned} z^6 &= (2.7731e^{j \cdot 5.160})^6 \\ &= 2.7731^6 . e^{j6 \cdot 5.160} \\ &= 454.77(\cos(30.96) + j \cdot \sin(30.96)) \\ &= \underline{\underline{408.32 - 200.23j}} \end{aligned}$$

Potenzieren: Beispiel

Für $r = 1$ besitzt die *Formel von Moivre* die *spezielle* Form

$$(\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + j \cdot \sin(n\phi)$$

Aus dieser wichtigen Beziehung lassen sich z.B. Formelausdrücke für $\cos(n\phi)$ und $\sin(n\phi)$ herleiten.

$$\begin{aligned} (\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi))^2 &= \cos(2\phi) + j \cdot \sin(2\phi) \\ \cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2 + j \cdot (2\cos(\phi)\sin(\phi)) &= \cos(2\phi) + j \cdot \sin(2\phi) \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Real- bzw Imaginärteile auf beiden Seiten erhalten wir die folgenden trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos(2\phi) &= \cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2 = 2\cos(\phi)^2 - 1 \\ \sin(2\phi) &= 2\cos(\phi)\sin(\phi) \end{aligned}$$

Wurzelziehen

Aus der *Algebra* ist bekannt, dass eine *algebraische Gleichung n-ten Grades* vom Typ

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

höchstens n reelle Lösungen, auch *Wurzeln* genannt, besitzt. Werden jedoch auch *komplexe* Lösungen zugelassen, so gibt es *genau* n Lösungen.

Fundamentalsatz der Algebra

Eine *algebraische Gleichung n-ten Grades*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen stets *genau n* Lösungen.

Wurzelziehen: Anmerkungen

- Die linke Seite der *algebraischen Gleichung* ist ein *Polynom* vom Grade n mit im Allgemeinen *komplexen* Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$.

  Es lässt sich auch im komplexen Zahlenbereich wie folgt in *Linearfaktoren* zerlegen:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$$

  $z_1, z_2, ..., z_n$ sind dabei die n *Polynomnullstellen*, d.h. die n *Lösungen* der algrebraischen Gleichung.

- Bei ausschliesslich *reellen* Koeffizienten a_i ($i = 0, 1, ..., n$) treten *komplexe* Lösungen immer *paarweise* auf, nämlich als Paare zueinander *konjugiert* komplexer Zahlen. Mit z_1 ist daher stets auch z_1^* eine Lösung der Gleichung.

Beispiel:

Die *algebraische Gleichung 3. Grades*

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$$

besitzt nach dem *Fundamentalstatz* genau *drei* Lösungen. Durch *Probieren* finden wir eine Lösung bei $z_1 = 1$.

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z^2+4)$$

Die Nullstellen des *1.reduzierten Polynoms* $z^2 + 4$ liefern die beiden übrigen Lösungen:

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = \pm 2j$$

Die obige algebraische Gleichung 3. Grades besitzt somit *eine* reelle Lösung und zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen:

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 1\ ,\ z_2 = 2j\ ,\ z_3 = -2j$$

Fortsetzung:

Das Polynom

$$z^3 - z^2 + 4z - 4$$

ist daher auch in der *Produktform*

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z-2j)(z+2j)$$

darstellbar (Zerlegung in Linearfaktoren).

Die n-te Wurzel aus a

Lösungen der speziellen algebraischen Gleichung $z^n = a$

- Eine komplexe Zahl z heisst eine *n-te Wurzel aus a* wenn sie der algebraischen Gleichung $z^n = a$ genügt ($a \in \mathbb{C}$).
- Die Gleichung

$$z^n = a = a_0 \cdot e^{j\alpha} \quad (a_0 > 0; n \in \mathbb{N})$$

besitzt im Komplexen genau n *verschiedene* Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = r(\cos(\phi_k) + j \cdot \sin(\phi_k)) = r \cdot e^{j\phi_k} \text{ mit}$$

$$r = \sqrt[n]{a_0} \quad \text{und} \quad \phi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \qquad k = 0, 1, .., n-1.$$

Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der Gauss'schen Zahlenebene auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{a_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.

Die n-te Wurzel aus a: Beispiel

Beispiel:

Die Gleichung $z^6 = 1$ hat genau *sechs verschiedene* Lösungen, deren Bildpunkte in der Gaussschen Zahlenebene an den Ecken eines regelmässigen *Sechsecks* liegen.
Sie lauten ($a_0 = 1$, $\alpha = 0$):

$$z_k = \cos(k \cdot \frac{2\pi}{6}) + j \cdot \sin(k \cdot \frac{2\pi}{6}) \qquad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Also

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} j = \overline{z_5} \\ z_2 &= -0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} j = \overline{z_4} \\ z_3 &= -1 \end{aligned}$$

Die n-te Wurzel aus a: Beispiel

Beispiel:
Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 1 - \sqrt{3}j$.

Zuerst brauchen wir die Polardarstellung von $w = 1 - \sqrt{3}j$

$$r = |w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\phi = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

$$w = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

Die Gleichung $z^3 = w$ hat genau 3 Lösungen

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3} + j\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$$

Die n-te Wurzel aus a: Beispiel

Fortsetzung:

$$\boxed{k=0} \quad z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+0}{3} + j\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+0}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + j\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\boxed{k=1} \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3} + j\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + j\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$

$$\boxed{k=2} \quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\cdot 2\pi}{3} + j\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\cdot 2\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + j\sin\frac{17\pi}{9}\right)$$

Die n-te Wurzel aus a: Beispiel

Beispiel:
Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft $z^6 = \sqrt{3} + j$.

Lösung:
Betrachte $w = \sqrt{3} + j \quad (\mathrm{Re}(w) = \sqrt{3}, \mathrm{Im}(w) = 1)$
Schreibe w zuerst in Polarform.

$$r = |w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\phi = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$w = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Die n-te Wurzel aus a: Beispiel

Fortsetzung:

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6} + j\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{6}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{36} + j\sin\frac{\pi}{36}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{6} + j\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{36} + j\sin\frac{13\pi}{36}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi}{6} + j\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{36} + j\sin\frac{25\pi}{36}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\cdot 3\pi}{6} + j\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\cdot 3\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{36} + j\sin\frac{37\pi}{36}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{36} + j\sin\frac{49\pi}{36}\right)$$

$$z_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{61\pi}{36} + j\sin\frac{61\pi}{36}\right).$$

Ende von Kapitel 7