20. Sept 2018 D-CHAB

MATHEMATIK III

Wie löst man die wichtigsten Typen von PDEs?

Partial Differential Equation

Wichtigste Beispiele:
- Wellengleichung
- Wärmeleitungsgleichung
- Laplace-Gleichung / Potentialgleichung.

ODE = ordinary differential equation
gewöhnliche Differentialgleichung.
= Gleichung für eine Funktion einer unabhängigen Variablen in der mindestens eine der Ableitungen der Funktion vorkommt.

Beispiel: $$\boxed{m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t))}$$

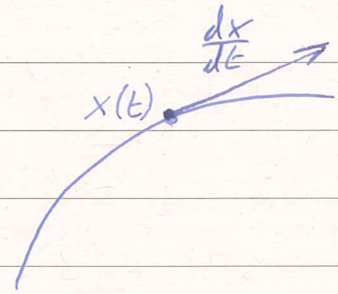
Zweites Newton'sches Gesetz.

Unbekannte Funktion
$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$
stellt die Position des Teilchens zur Zeit t dar.

$\frac{dx(t)}{dt}$ = Geschwindigkeitsvektor

$\frac{d^2x(t)}{dt}$ = Beschleunigung

m = Masse (konstant)



$F(x)$ = Kraftfeld.

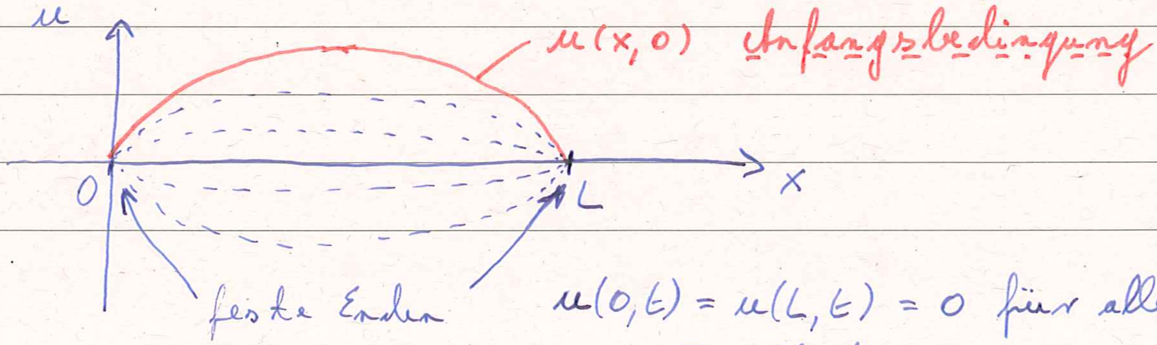
PDE = partial differential equation
partielle Differentialgleichung
= Gleichung für eine gesuchte Funktion von mehreren Variablen, in der partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

Beispiel: $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Wellengleichung (für eine Saite).

Unbekannte Funktion:

$u(x,t)$ stellt die Auslenkung des Saitenpunktes mit Koordinate x zur Zeit t dar.
Es ist $x \in [0, L]$, $t \in [0, +\infty)$.

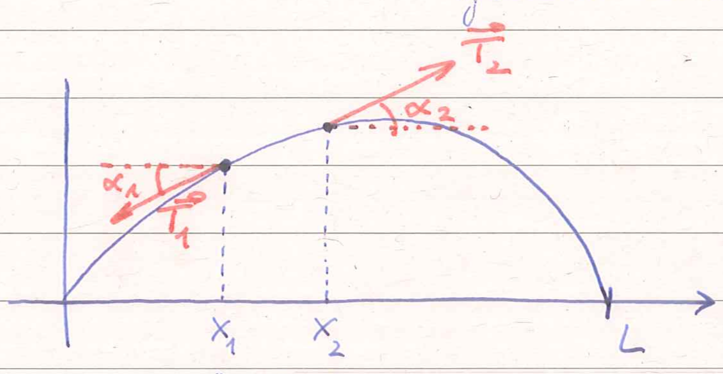


$u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t

Randbedingungen.

Wellengleichung für eine "ideale Saite"

gleicht einer wirklichen Saite.



$x_2 - x_1$ ist klein

$\vec{T}_1$ (bzw. $\vec{T}_2$) : Spannkraft am Punkt x_1 (bzw. x_2)
α_1 (bzw α_2) : Winkel zwischen $\vec{T}_1$ (bzw. $\vec{T}_2$) und der horizontalen Achse.

Annahmen:

- Die Auslenkung $u(x,t)$ is an jedem Punkt x und für alle Zeiten t klein.
- Die einzige Kraft, die auf jedem Querschnittselement der Saite ausgeübt wird, ist die Spannkraft $\vec{T}$.
- Die horizontalen Komponenten der Spannkraft sind konstant:

$$T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T$$

$\Rightarrow$ keine horizontale Bewegung.

Nur vertikale Bewegung:

$$\text{Kraft} = T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Newton}}}{=} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Es ist $m = \underbrace{\rho}_{\text{Masse pro Längeneinheit}}(x_2 - x_1)$ die Masse des Elements.

Dividiere die Gleichung $T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
durch die Konstante $T_2 \cos\alpha_2 = T_1 \cos\alpha_1 = T$.

$$\underbrace{\frac{T_2 \sin\alpha_2}{T_2 \cos\alpha_2}}_{\tan\alpha_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2}} - \underbrace{\frac{T_1 \sin\alpha_1}{T_1 \cos\alpha_1}}_{\tan\alpha_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}} = \frac{\rho(x_2 - x_1)}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Steigung in x_2 Steigung in x_1.

Wir teilen durch $x_2 - x_1$:

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\rho}{T}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

und lassen $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, also $x_2 - x_1 \to 0$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

eindimensionale Wellengleichung.

$c^2 = \frac{T}{\rho}$: positive Konst.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ PDE

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t } BC Randbedingungen (boundary conditions)

$u(x,0) = f(x)$
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ } IC Anfangsbedingungen (initial conditions).

→ Wohlgestelltes mathematisches Problem.

Wohl gestelltes mathematisches Problem.
hat eine eindeutige Lösung.
Diese ist stetig bezüglich der Anfangsbedingungen.

Probleme	Werkzeuge
Verschiedene Typen von PDEs	Separation der Variablen
	Fourier-Reihen
	Fourier-Transformation
	Laplace-Transformation
	Charakteristiken
	...

Definition: Eine PDE ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion von mehreren Variablen, in der partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen.
Die Ordnung der PDE ist der Grad der höchsten auftretenden partiellen Ableitung.

Es bezeichnen x und t oder x und y die unabhängigen Variablen und $u = u(x,t)$ oder $u = u(x,y)$ die unbekannte Funktion.

Eine lineare homogene PDE 2. Ordnung ist eine PDE der Form

$$A u_{xx} + 2B u_{xt} + C u_{tt} + D u_x + E u_t + F u = 0,$$

wobei A, B, C, D, E und F Funktionen von x und t sind. (A, B, C nicht gleichzeitig null). Eine solche Gleichung heisst

$$\begin{cases} \text{elliptisch} & \text{falls } AC - B^2 > 0 \\ \text{hyperbolisch} & \text{falls } AC - B^2 < 0 \\ \text{parabolisch} & \text{falls } AC - B^2 = 0 \end{cases}$$

Die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ist eine hyperbolische PDE.

Die Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 u_{xx}$ ist eine parabolische PDE.

Die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist eine elliptische PDE.