27. Sept. 2018

Was haben wir letzte Woche gelernt?

- Definition einer PDE.
- Ordnung einer PDE.
- Bsp. einer PDE zweiter Ordnung:
  die Wellengleichung.
- Klassifikation linearer homogener PDEs zweiter Ordnung:
  - elliptisch — Laplace-Gleichung.
  - hyperbolisch — Wellengleichung.
  - parabolische — Wärmeleitungsgleichung.

Heute:

Wann ist eine PDE
- linear
- homogen / inhomogen. ?

Superpositionsprinzip und Lösung der 1-dim. Wellengleichung.

Lineare PDE, Separation der Variablen.

Def.: Ein Operator $\mathcal{L}$ bildet eine gegebene Funktion v auf eine Funktion $\mathcal{L}[v]$ ab.
Kommen in dem Ausdruck $\mathcal{L}[v]$ nur (partielle) Ableitungen von v (mindestens aber eine) und die Funktion v vor, so nennt man $\mathcal{L}$ Differentialoperator.

Def.: Der Operator $\mathcal{L}$ heisst linear, falls für beliebige Funktionen u, v und jede Konstante c gilt:

$$\mathcal{L}[u+v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v].$$
$$\mathcal{L}[cu] = c\,\mathcal{L}[u].$$

Ist $\mathcal{L}$ ein linearer Differentialoperator, so ist

$$\mathcal{L}[u] = 0$$

eine homogene lineare PDE. und

$$\mathcal{L}[u] = g$$

eine inhomogene lineare PDE, wobei $g \not\equiv 0$ eine Funktion der unabhängigen Variablen x, t (oder x, y) ist.

Mit anderen Worten: Eine PDE ist linear, wenn die Gleichung linear in der unbekannten Funktion und deren partiellen Ableitungen ist. Eine lineare Gleichung heisst homogen, wenn jeder Term entweder die Unbekannte oder eine ihrer Ableitungen enthält. Sonst heisst sie inhomogen.

Bsp.:

$$t\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{xt}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \underbrace{1}$$

linear inhomogen 2. Ordnung

$$t\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 2e^{xt}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = \underbrace{0}$$

linear homogen 3. Ordnung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{x\,u\,\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{nicht linear}} = \sin x$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{\text{nicht linear}} + \sin x\,\frac{\partial u}{\partial t} = 1$$

$$\xrightarrow{\;u\;} \boxed{\;\mathcal{L}\;} \xrightarrow{\;\mathcal{L}[u]\;}$$

linearer Operator.

- $\mathcal{L}[u] = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
- $\mathcal{L}[u] = e^{xt}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$
- $\mathcal{L}[u] = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ← Wellengleichung.
- $\mathcal{L}[u] = \displaystyle\int_0^x u(s,t)\,ds.$

Superpositionsprinzip.

Wenn u_1, u_2 Lösungen einer homogenen linearen PDE sind,
dann ist für beliebige Konstanten c_1, c_2 die Funktion $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ auch eine Lösung.

Folgerung:
Seien $u_0, u_1, u_2, \ldots$ Lösungen einer homogenen linearen PDE. Dann ist die Reihe

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

auch eine Lösung, sofern sie konvergiert.

Das Superpositionsprinzip gilt ähnlich für homogene Nebenbedingungen wie

$$u(L, t) = 0 \quad \text{oder} \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Lösungsstrategie:
1) Finde viele Lösungen des homogenen Teils: die Basislösungen.
2) Versuche durch geeignete Superposition der Basislösungen, die inhomogenen Nebenbedingungen zu erfüllen.

Eine Strategie, um Basislösungen zu finden: Separation der Variablen.

Löse:

PDE $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Wellengleichung

BC $u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t

Randbedingungen

IC $u(x,0) = f(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$

Anfangsbedingungen.

Trennung der Variablen:

Schritt 1: Produktansatz

Schritt 2: Basislösungen

Schritt 3: Erfülle IC : Superposition.

Trennung (Separation) der Variablen.

Schritt 1:

Produktansatz: Finde Lösungen der PDE der Form

$$\boxed{u(x,t) = \underbrace{X(x)}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} \underbrace{T(t)}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab.}}} \qquad *$$

Wir betrachten die Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Es ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \overset{*}{=} X(x) \cdot T''(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \overset{*}{=} X''(x) \cdot T(t).$$

Also wird $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$X(x)\,T''(t) = c^2 X''(x)\,T(t)$$

Annahme: $c^2 X(x) T(t) \neq 0$.

Teile dadurch und erhalte:

$$\underbrace{\frac{T''(t)}{c^2 T(t)}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab.}} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} = \underset{\text{muss konstant sein!}}{k}$$

Wir erhalten zwei ODEs!

$$\boxed{X'' - kX = 0} \quad \& \quad \boxed{T'' - kc^2 T = 0}$$

Schritt 2 : Basislösungen

Finde Lösungen X & T der ODEs, so dass das Produkt XT die Randbedingungen (BC) erfüllt.

$$BC \begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } t.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{T(t) = 0 \text{ für alle } t} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u \equiv 0$
nicht interessant.

Löse
$$\boxed{\begin{aligned} X'' - kX &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(L) &= 0 \end{aligned}}$$

Erinnerung : lineare ODEs:
Drei Fälle:

- $k = 0$: $X(x) = Ax + B$
- $k = \mu^2 > 0$: $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$
- $k = -p^2 < 0$: $X(x) = A\cos px + B\sin px$

$k = 0$
$$\begin{cases} X(x) = Ax + B \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{vmatrix} B = 0 \\ A = 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow u \equiv 0$: nicht interessant

$\underline{k = \mu^2 > 0}$ $\quad \begin{cases} X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$

$$\longrightarrow \left| \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A \underbrace{e^{\mu L}}_{>0} + B \underbrace{e^{-\mu L}}_{>0} = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \quad u \equiv 0 \quad$: nicht interessant.

$\underline{k = -p^2 < 0}$ $\quad \left| \begin{array}{l} X(x) = A \cos px + B \sin px \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} A = 0 \\ B \sin pL = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ interessant, wenn $pL = n\pi$
(dann kann $B \neq 0$ sein).

$$p = \frac{n\pi}{L}.$$

Die Funktionen

$$\boxed{X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x} \quad , \; n = 1, 2, \dots$$

sind Lösungen von

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \quad \text{für} \; \boxed{k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

<u>Bem</u>: $\quad X_{-n}(x) = -X_n(x)$

Löse jetzt : $\boxed{T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0}$

$\uparrow$ $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Sei $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$. Dann ist

$$\boxed{T'' + (\lambda_n)^2 T = 0}$$

Allgemeine Lösung für jedes n:

$$T_n(t) = C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t.$$

<u>Zusammenfassung</u>

Erhalte Lösungen der Wellengleichung, welche die Randbedingungen (BC) erfüllen, der Form

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)\, T_n(t) \\ &= \sin \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t \right) \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$

genannt <u>Eigenfunktionen</u> oder charakteristische Funktionen.

$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ <u>Eigenwerte</u> oder charakteristische Werte.

||

Werte für die nichttriviale Lösungen der PDE mit BC existieren.

Die Funktionen $u_n(x,t)$ stellen die <u>harmonischen Schwingungen</u> dar mit

Periode $\frac{2L}{cn}$, Frequenz $\frac{cn}{2L}$.

Für $n = 1$: <u>Grundschwingung</u>.

Die anderen Frequenzen sind Vielfache der $\frac{c}{2L}$.

Superpositionsprinzip:

$$u(x,t) = \sum_{\text{endlich}} u_n(x,t)$$

ist eine Lösung von PDE & BC.

Wir erfüllen nun die IC.

<u>Schritt 3</u>: Erfülle IC.

Betrachte <u>formelle Lösungen</u> der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos\lambda_n t + D_n \sin\lambda_n t) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

<u>Achtung</u>: Konvergenz der Reihe!

Falls die Reihe konvergiert, so ist $u(x,t)$ auch eine Lösung der PDE mit BC.

Wähle C_n und D_n so, dass die IC erfüllt sind:

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

Es ist

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,(C_n + 0) \stackrel{!}{=} f(x) \;,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,(0 + \lambda_n D_n) \stackrel{!}{=} g(x) \;,$$

also

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Es gibt Koeffizienten C_n und D_n, so dass die Reihen konvergieren und die Gleichungen erfüllt sind.

Dies folgt aus der Theorie der

Fourier - Reihen.

Bsp.: Ist $f(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ und $g(x) \equiv 0$, so kann man die Koeffizienten

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_j = 0 \quad \text{für } j \neq 1 \\ D_n = 0 \;, \quad n = 1, \dots \infty \end{cases}$$

nehmen.