4. Okt. 2018

Was haben wir letzte Woche gelernt?

- Lineare PDEs: Superpositionsprinzip.
- Anwendung auf die schwingende Saite.

PDE $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

BC $u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle t.

IC $u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

Vorgehen in 3 Schritten:

Schritt 1: Produktansatz für die PDE.

Schritt 2: Basislösungen: erfülle BC.

Schritt 3: Erfülle IC durch Superposition.

Für Schritt 3 benötigen wir die Theorie der

Fourier-Reihen.

Dies ist das Thema der heutigen Vorlesung.

Fourier-Reihen.

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst T-periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl T gibt, Periode von f, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x).$$

Die kleinste positive Periode heisst Haupt- oder Fundamentalperiode.

Bsp.:
- Die Funktionen $\cos x$, $\sin x$ sind 2π-periodisch und auch 4π-, 6π-, ... periodisch.
  Fundamentalperiode.
- Die Funktionen $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ sind $\frac{2\pi}{n}$-periodisch.
- Die Funktionen $\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$ sind T-periodisch.
- Die Funktionen $\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$, $\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$ sind $\frac{T}{n}$-periodisch.

Ein Skalarprodukt für T-periodische Funktionen.

Im Funktionsraum der T-periodischen Funktionen, $\mathbb{R}$ definieren wir ein Skalarprodukt

$$\boxed{e \cdot f = \frac{2}{T}\int_a^b e(x)\, f(x)\, dx}$$

e, f: zwei T-periodische Funktionen $(T = b-a)$.

Die Funktionen

$$\boxed{\begin{array}{ll} e_n(x) = \cos\frac{2n\pi x}{T} , & e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f_n(x) = \sin\frac{2n\pi x}{T} , & n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}}$$

sind orthonormal bezüglich des Skalarprodukts, d.h.

$$e_m \cdot e_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

$$f_m \cdot f_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

$$e_m \cdot f_n = 0 \quad \text{für alle } m \text{ und } n.$$

Wir benötigen trigonometrische Formeln:

$$\cos(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((A+B)x) + \cos((A-B)x)\right)$$
$$\sin(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((A-B)x) - \cos((A+B)x)\right)$$
$$\cos(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\left(\sin((A+B)x) - \sin((A-B)x)\right).$$

Nun gilt für $m \neq n$

$$e_m \cdot e_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2m\pi x}{T}\,\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx$$

Def des Skalarprodukts

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right)\,dx$$

trigonometrische Formel

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2(m+n)\pi}\sin\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \frac{T}{2(m-n)\pi}\sin\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right)\right]_0^T$$

$m \neq n$

$$= 0 \quad \text{falls } m \neq n$$

<u>Analog:</u>

$$e_m \cdot f_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2m\pi x}{T}\,\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx = \ldots$$

$$f_m \cdot f_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\frac{2m\pi x}{T}\,\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx = \ldots$$

Fourier behauptet, dass die Funktionen $e_0(x)$
$e_n(x)$, $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$
eine orthonormierte Basis von R bezüglich des obigen Skalarprodukts bilden.

<u>Fourier-Reihen:</u>

Eine T-periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ besitzt die <u>Fourier-Reihe</u>

$$f(x) \sim \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)},$$

wobei für die Koordinaten a_n und b_n die folgenden Formeln gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}}$$

Dies sind die <u>Euler-Formeln</u>.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} a_n &= f \cdot e_n \\ b_n &= \underset{\text{Skalarprodukt}}{f \cdot f_n} \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es sind a_n, b_n, a_0, $n = 1, 2, \dots$, reelle Konstanten.

Satz: Die Fourier-Reihe einer periodischen, stückweise stetig differenzierbaren Funktion f konvergiert

- in allen Stetigkeitspunkten x gegen $f(x)$ und
- in allen Sprungstellen x gegen das arithmetische Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$.

Sonderfall $T = 2\pi$:

Sei $f(x)$ 2π-periodisch, stückweise stetig diff'bar. Dann besitzt $f(x)$ die Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)}$$

wobei

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

Die Reihe

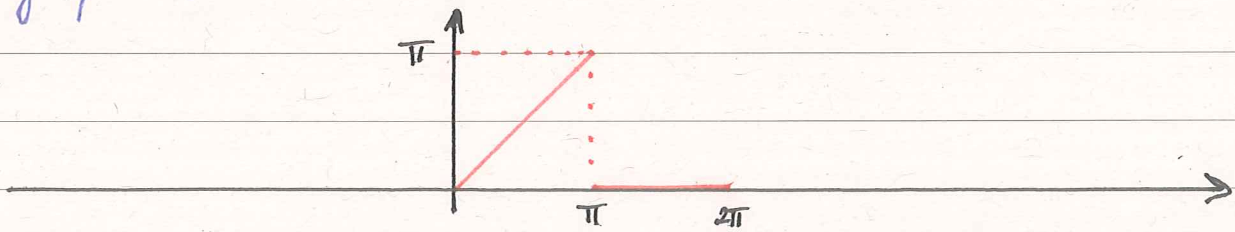
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

heisst trigonometrische Reihe. Die Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ der Reihe sind reelle Konstanten.

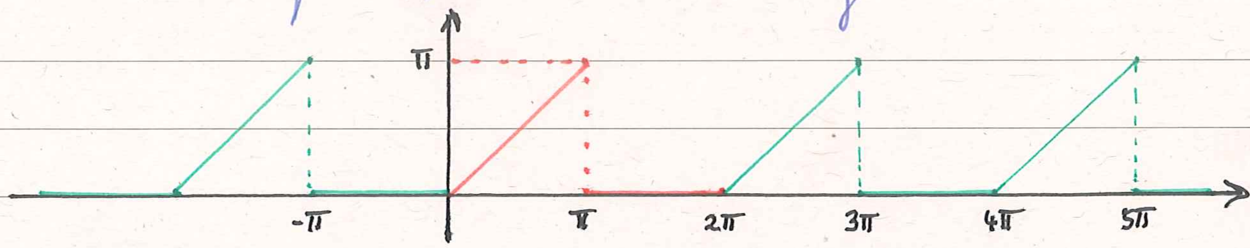
Bsp.: Bestimme die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{für} \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Graph dieser Funktion



und ihrer periodischen Fortsetzung



Die Fourier-Reihe von $f(x)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

hat die folgenden Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x \frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin(nx)\, dx$$

partielle Integration

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{1}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{-2}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{1}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}$$

partielle Integration.

$$= \frac{-1}{n}\cos(n\pi) = \begin{cases} \frac{-1}{n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die ersten Koeffizienten sind dann

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-2}{\pi}$	0	$\frac{-2}{9\pi}$	0	$\frac{-2}{25\pi}$

....

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Somit ist die Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{2}{9\pi}\cos(3x)$$

$$+ \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{5}\sin(5x)$$

$$+ \ldots$$

Bem.: An der Sprungstelle $x = \pi$ ergibt sich die Formel

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(-1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \frac{1}{36} - \ldots\right) = \underbrace{\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2}}_{\frac{\pi + 0}{2}}$$

d.h.

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$