11. Okt. 2018

Was haben wir letzte Woche gelernt?

- T-periodische Funktionen
- Fourier - Reihen.

Heute:

- gerade und ungerade Funktionen.
- komplexe Fourier-Reihen.
- Bsp.: Wellengleichung.

Gerade und ungerade Funktionen.

Def.: Eine Funktion $f(x)$ heisst gerade, falls $f(-x) = f(x)$. Sie heisst ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$.

Das Produkt von zwei geraden oder zwei ungeraden Funktionen ist gerade. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist ungerade.

Ist $g(x)$ eine T-periodische Funktion, so ist

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} g(x)\,dx.$$

Das Integral einer ungeraden Funktion auf dem symmetrischen Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ verschwindet. Daraus folgt:

Ist $f(x)$ eine ungerade T-periodische Funktion, so verschwinden die Fourier-Koeffizienten a_n und $f(x)$ ist durch eine Sinusreihe gegeben:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \qquad (f \text{ ungerade})$$

wobei

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T}\,dx \quad , \; n \geq 1.$$

Analog:

Ist $f(x)$ eine gerade T-periodische Funktion, so verschwinden die Fourier-Koeffizienten b_n, und $f(x)$ ist durch eine Cosinusreihe gegeben:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} \quad , \quad (f \text{ gerade})$$

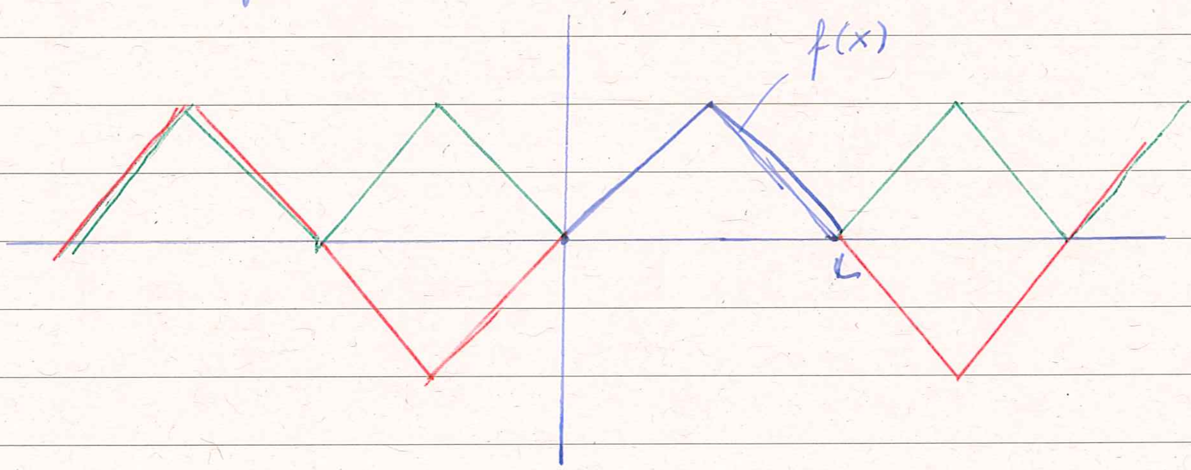
wobei

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} \, dx \quad , \quad n \geq 0 .$$

Bsp.:

ungerade Funktion	gerade Funktion
$\sin(x)$	$\cos x$
x^3	x^2
$x^2 \sin(x)$	$(x^3 - x)\sin(x)$

Bem.: Ist $f(x)$ auf einem Intervall $[0, L]$ definiert, so kann man $f(x)$ als gerade oder ungerade Funktion fortsetzen.



Bsp.: $f(x) = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq L.$

① Bestimme die Sinusreihe.

② Bestimme die Cosinusreihe.

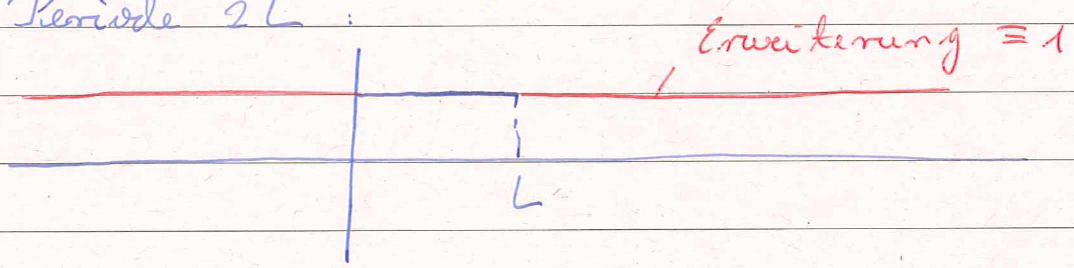
① Erweitere f als ungerade Funktion der Periode $2L$.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$= \frac{2}{n\pi}\Big(1 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\Big) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$1 \sim \sum_{n \text{ unger.}} \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

② Erweitere f als gerade Funktion der Periode $2L$:



$1 \sim 1$: Cosinusreihe : $\frac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow a_0 = 2.$

$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 1.$

Komplexe Fourier-Reihen.

Def.: Eine Reihe der Form
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} \quad , \quad c_n \in \mathbb{C}$$
heisst komplexe Fourier-Reihe.

Falls die Reihe konvergiert, so definiert sie eine Funktion
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$
die T-periodisch ist.

Aus den Formeln
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad , \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$
folgt, dass man jede komplexe Fourier-Reihe auch in der Form
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)\right)$$
schreiben kann.

In der Tat ist
$$a_n = c_n + c_{-n} \quad , \quad b_n = i\,(c_n - c_{-n}) \quad , n \geq 1$$
$$a_0 = 2c_0$$
und
$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - i\, b_n) & \text{falls } n > 0 \\ \frac{1}{2} a_0 & \text{"} \quad n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + i\, b_{-n}) & \text{"} \quad n < 0 \end{cases}$$

Es ist
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{\frac{-2\pi i n x}{T}}\, dx$$

Bsp.: Eindimensionale Wellengleichung.

Schritt 1: Produktansatz

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

Wir erhalten ODEs:

$$\left\| \begin{array}{l} X'' - kX = 0 \\ T'' - kc^2 T = 0 \end{array}\right.$$

Schritt 2: Basislösungen:

Die Funktionen

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

sind Lösungen von

$$\left| \begin{array}{l} X'' - kX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{array}\right. \qquad \text{für } k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Die Gleichung

$$T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0$$

$$\hookrightarrow k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

besitzt die Lösungen:

$$\| \; T_n(t) = A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)$$

für $n = 1,2,\dots$

Basislösungen:

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Schritt 3: Erfülle IC

Betrachte formelle Lösungen der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Wähle die A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$, so dass die IC erfüllt sind:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

Es ist

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \stackrel{!}{=} f(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \stackrel{!}{=} g(x)$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Die Formeln für die Fourier-Koeffizienten liefern nun

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Da $f(x)$ und $g(x)$ gegeben sind, kann man nun A_n und B_n und damit die Lösung $u(x,t)$ bestimmen.

<u>Bemerkung</u>: Die Werte der Koeffizienten A_n, B_n hängen nur von den Werten von $u(x,0)$ und $u_t(x,0)$ auf dem Intervall $[0, L]$ ab.

Die Sinusreihen sind dann für alle x definiert.