18. Okt. 2018

Was haben wir letzte Woche gelernt?

- komplexe Fourier-Reihen
- Anwendung der Fourier-Reihen bei der Lösung der Wellengleichung.

Heute?

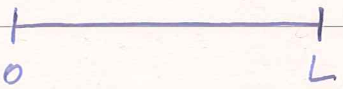
- Wärmeleitung.
- Nebenbedingungen.

Wärmeleitung

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Herleitung:
Energieerhaltung und
$\underbrace{j(x,t)}_{\text{Energiefluss}} = -k u_x(x,t)$

Unbekannte: $u(x,t)$ = Temperatur im Punkt x zur Zeit t.
c^2 = "Wärmeleitfähigkeit".



Stab mit perfekter Isolierung der Enden.

BC Randbedingung:
Temperatur bleibt an beiden Enden konstant $= 0$

IC Anfangsbedingung:
In jedem Punkt ist die Temperatur zur Zeit $t = 0$ bekannt.

Problem:

$$\begin{cases} \text{PDE} : & \text{1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung.} \\ \text{BC} : & u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ für alle } t. \\ \text{IC} : & u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

dies ist die einzige IC, da in der PDE nur $\frac{\partial}{\partial t}$ vorkommt.
(brauchen $f(0) = f(L) = 0$).

Da $\left.\begin{matrix}\text{PDE}\\ \text{BC}\end{matrix}\right\}$ linear homogen sind, versuchen

wir die Separation der Variablen.

Schritt 1: Finde Lösungen der PDE der Form

$$\boxed{u(x,t) = X(x)\,T(t).}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= X(x)\,T'(t)\\[1em] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= X''(x)\,T(t)\end{aligned}\right\}$$

Einsetzen in PDE

$$\boxed{X(x)\,T'(t) = c^2 X''(x)\,T(t)}$$

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{c^2\,T(t)}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} = \underbrace{k}_{\text{constant}}$$

Wir erhalten zwei ODEs:

$$\boxed{X'' - kX = 0}$$

$$\boxed{T' - kc^2 T = 0.}$$

Schritt 2: Erfülle BC.

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)\,T(t) = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } t$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} T(t) = 0 \\ \text{für alle } t \end{cases}}_{\text{triviale Lösung } u \equiv 0} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}}_{\text{interessant.}}$$

Löse $\boxed{\begin{aligned} &X'' - kX = 0 \\ &X(0) = 0 \\ &X(L) = 0 \end{aligned}}$

Falls $k \geq 0$: nur triviale Lösungen (Aufgabe!).

Falls $k = -p^2 < 0$: $\begin{cases} X(x) = A\cos px + B\sin px \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \left| \begin{aligned} &A = 0 \\ &B \sin pL = 0 \end{aligned} \right.$

Interessant für $\boxed{pL = n\pi}$: $p = \dfrac{n\pi}{L}$.

$$k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Wir erhalten Lösungen

$$\boxed{X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}, \quad \underline{n = 1, 2, \ldots}$$

Löse jetzt $\boxed{T' + \underbrace{\lambda_n^2}_{} T = 0}$

$\lambda_n^2 = p^2 c^2$, $p = \frac{n\pi}{L}$.

Eigenwerte : $\boxed{\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}}$

Nun ist die allgemeine Lösung : $\boxed{T_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}}$, $n = 1, 2, \dots$

beliebige Konstante.

Wir erhalten Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, welche die BC erfüllen und die folgende Form haben:

$$\boxed{\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)\, T_n(t) \\ &= B_n e^{-\lambda_n^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}} \quad , n = 1, 2, \dots$$

Eigenfunktionen.

Schritt 3: Erfülle IC.

Betrachte Reihen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \underbrace{e^{-\lambda_n^2 t}}_{\substack{\to 0 \\ \text{falls } t \to +\infty.}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

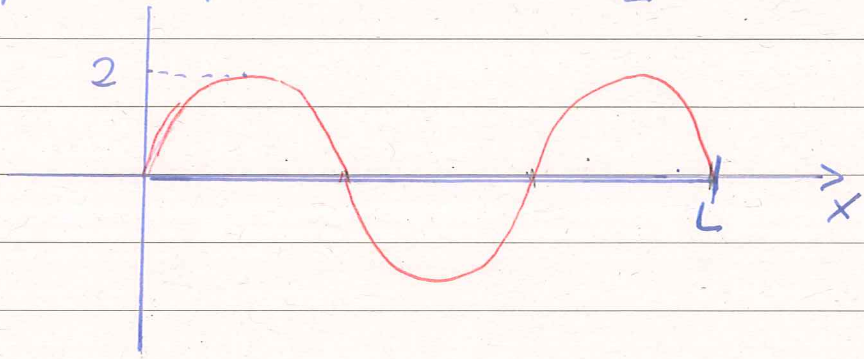
$$u(x,0) = f(x) \iff \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

Wähle die B_n als Koeffizienten der Sinusreihe von $f(x)$.

Fourier-Reihe in der die Koeffizienten A_n der $\cos(n\ldots) = 0$ sind.

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Bsp. $f(x) = 2 \sin \frac{3\pi x}{L}$

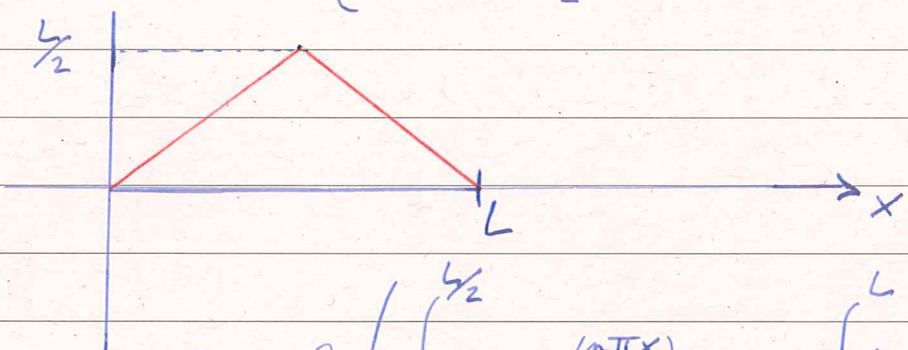


$$B_3 = 2 \quad , \quad B_n = 0 \quad , \quad n \neq 3 .$$

Lösung ist

$$u(x,t) = 2 \cdot e^{-\left(\frac{3\pi c}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Bsp. $f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L-x & , \ \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$



$$B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

$$= \ldots = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4L}{n^2\pi^2} & n = 4k+1 \\ \frac{-4L}{n^2\pi^2} & n = 4k+3 \end{cases}$$

partielle Integration.

Hier wird $f(x)$ "ungerade" fortgesetzt mit Per. $2L$.

Lösung ist:

$$u(x,t) = \sum_{n \text{ unger.}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4L}{n^2\pi^2} e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Details der partiellen Integration:

$$B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{L}\left(\left[\frac{-Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^{L/2} + \int_0^{L/2} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

$$+ \frac{2}{L}\left(\left[\frac{-L(L-x)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{L/2}^{L} - \int_{L/2}^{L} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{L}\left(\left[\frac{-Lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^{L/2} \right)$$

$$+ \frac{2}{L}\left(\left[\frac{-L(L-x)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{L/2}^{L} \right)$$

$$= \frac{2}{L}\left(\cancel{\frac{-L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right.$$

$$\left. \cancel{+\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{4L}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Nebenbedingungen:

Ziel: Temperatur im Stab zu einem beliebigen Zeitpunkt eindeutig bestimmen.

Wir benötigen:

i) anfängliche Temperaturverteilung

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{IC}$$

ii) Randbedingungen am Stabende, z.B.:

- Enden auf konstanter Temperatur

$$\underbrace{u(0,t) = U_0 \quad \text{und} \quad u(L,t) = U_L}_{\text{(homogene/inhomogene) Dirichlet-Randbed.}} \qquad \text{BC}$$

- Enden isoliert, d.h. es findet zu keinem Zeitpunkt ein Wärmetransport durch die Ränder statt.

$$\underbrace{u_x(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad u_x(L,t) = 0}_{\text{homogene Neumann-Randbedingung.}} \qquad \text{BC}$$

adiabatische Bedingungen.

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen.

1. Schritt: Bestimme eine stationäre Lsg $u_p(x)$ von

nicht zeitabhängig.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_p}{dx^2} = 0 & \rightsquigarrow \quad u_p(x) = ax + b \\ u_p(0) = U_0 & b = U_0 \\ u_p(L) = U_L & a = (U_L - U_0)/L \end{cases}$$

2. Schritt: Bestimme Lsg $u_H(x,t)$ von

$$\frac{\partial u_H}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u_H}{\partial x^2}$$

$$u_H(0,t) = 0 \quad , \quad u_H(L,t) = 0$$

$$u_H(x,0) = f(x) - u_p(x).$$

Dann ist

$$\boxed{u(x,t) = u_p(x) + u_H(x,t)}$$

Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = U_0 \quad , \quad u(L,t) = U_L$$

$$u(x,0) = f(x).$$

Adiabatische Bedingungen
(homogene Neumann-Bedingungen.

Methode: Separation der Variablen

Schritt 1: Wie gehabt.
Schritt 2:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } t.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{T(t) = 0 \text{ für alle } t}_{\text{nicht interessant}} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

Löse:
$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

Fall $\lambda = -p^2 < 0$:
$$\begin{cases} X(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \\ X'(0) = 0 \longrightarrow B = 0. \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

$pL = n\pi$

Erhalte Lösungen:

$$X_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

Schritt 3: Setze

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$$

IC: $u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$

Wähle für A_0, A_n, $n = 1, 2, \ldots$, die Fourier-Koeffizienten der Cosinusreihe von $f(x)$.

Bem.: $u(x,t) \longrightarrow \frac{A_0}{2}$ für $t \to \infty$.

wobei

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \text{Durchschnittswert von } f(x).$$