25. Okt. 2018

Letzte Woche?

- Anwendung der Theorie der Fourier-Reihen auf die Wärmeleitungsgleichung.
- Verschiedene Nebenbedingungen.

Heute?

- Erfüllen der Nebenbedingungen. *
- Die Fourier-Transformation.

* siehe Notizen der letzten Woche.

Die Fourier-Transformation

Wir haben gelernt, dass Fourier-Reihen periodische Funktionen darstellen. Um PDEs nicht nur auf endlichen Intervallen, sondern auch in unendlichen Gebieten untersuchen zu können, müssen wir uns von der Periodizitätsbedingung befreien.

Wir betrachten die Fourier-Reihe einer L-periodischen Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{\frac{-2\pi i n}{L} x} f(x)\, dx$$

und bilden den Grenzwert $L \to \infty$.
Sei

$$\Delta\xi = \frac{2\pi}{L}, \quad \text{dann} \lim_{L\to\infty} \Delta\xi = 0.$$

Für $\xi = \frac{2\pi n}{L} = \Delta\xi \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$, führen wir die folgende Notation ein:

$$= \frac{2\pi}{L} \cdot n = \Delta\xi \cdot n$$

$$\hat{f}_L(\xi) = L c_n = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \quad , \quad n = \frac{L\xi}{2\pi}.$$

Dann gilt:
$$f(x) = \sum_{\xi} \frac{1}{L} \hat{f}_L(\xi) e^{i\xi x}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\xi} \hat{f}_L(\xi) e^{i\xi x} \Delta\xi \right) \quad , \Delta\xi = \frac{2\pi}{L}.$$

Riemannsche Summe.

Wir betrachten stückweise glatte Funktionen f, für die das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$
konvergiert. Kurz: $f \in L^1(\mathbb{R})$.

<u>Def.</u>: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Die <u>Fourier-Transformierte</u> von f ist die Funktion $\mathcal{F}[f] = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

Die <u>inverse Fourier-Transformierte</u> (oder Fourierrücktransformierte) von f ist die Funktion $\mathcal{F}^{-1}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi.$$

<u>Satz</u>: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ so, dass $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist f stetig und
$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi.$$

Regeln für die Fourier-Transformation:

1) Linearität: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g].$$

2) Differentiationsregel: $\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f](\xi)$.

Bew.: Partielle Integration

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = \hat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(y) e^{-i\xi y} \, dy$$

$$= \underbrace{f(y) e^{-i\xi y} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i\xi \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} \, dy}_{=\hat{f}(\xi)}$$

gilt, denn aus $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$ folgt, dass für geeignete Folgen $x_i \to \infty$, $y_i \to -\infty$ gilt:

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\to\infty} f(y_i) = 0$$

Die Fourier-Transformation "verwandelt" also eine Ableitung in eine Multiplikation mit $i\xi$.

3) Sei $\varphi(x) := \frac{d^n}{dx^n} f(x)$, dann ist $\hat{\varphi}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$

$$\varphi(x) := x^n f(x), \quad \hat{\varphi}(\xi) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n} \hat{f}(\xi).$$

4) $\varphi(x) := f(a(x-d))$: $\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{a} e^{-i\xi d} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$

5) $\varphi(x) := e^{ixd} f(x)$, $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi - d)$.

6) Faltung: Ist $\varphi(x) := (f * g)(x)$, d.h.

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy =: (f * g)(x)$$

die Faltung der Funktionen f und g, so gilt

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi).$$

7) Produkt: Ist $\varphi(x) = f(x)\, g(x)$, so gilt

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$$

8) $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$.

9) Ist $\varphi(x) := \int_a^x f(y)\, dy$, $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$,

so gilt

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{i\xi} \hat{f}(\xi).$$

Bsp.: Berechnung der Fourier-Transformierten von

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i\xi x} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}\right)} \, dx$$

$$\overset{*}{=} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} \, dy$$

$$= e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} .$$

* Variablensubstitution $y = x + \frac{i\xi}{2a}$ mit einer Verschiebung um eine komplexe Zahl.

Analog erhält man

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \, e^{i\xi x} \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{4\pi a} \, e^{-ax^2}$$

$$= f(x).$$

Wir werden jetzt die Fourier-Transformierte mit Hilfe einer anderen Methode berechnen.

2. Methode: Setze

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

Es ist

$$g'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

$$u' = (-ix)e^{-ax^2} \qquad v = e^{-ix\xi}$$

$$u = \frac{i}{2a} e^{-ax^2} \qquad v' = (-i\xi)e^{-ix\xi}$$

$$= \frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\xi}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= \frac{-\xi}{2a}\, g(\xi).$$

Die Fourier-Transformierte erfüllt also die ODE:

$$g'(\xi) + \frac{\xi}{2a}\, g(\xi) = 0$$

Die Lösung ist

$$g(\xi) = g(0)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$