1. Nov. 2018

Letzte Woche?

- Die Fourier-Transformation: Definition und Eigenschaften.

Heute?

- Anwendung: Wärmeleitungsgleichung.

Anwendung: Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$.

Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ lautet

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) & , x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Es ist $c^2 > 0$ ein fester Parameter und $f(x)$ ist eine gegebene Funktion.

Wir schreiben die Gleichung als eine Differentialgleichung für die Fourier-Transformierte von u bezüglich x. Es gilt:

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t)\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

Wir differenzieren unter dem Integral:

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_t(\xi,t)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t)\,(i\xi)^2 e^{i\xi x}\, d\xi$$

Es folgt, dass $\hat{u}(\xi,t)$ das folgende Anfangswertproblem erfüllt:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + c^2\xi^2\,\hat{u}(\xi,t) = 0, & \xi \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

Für jedes feste ξ ist dies eine ODE.

Die Lösung ist
$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\, e^{-c^2\xi^2 t}$$

Nun erhalten wir $u(x,t)$ in Abhängigkeit von $\hat{f}(\xi)$:
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-c^2\xi^2 t + i\xi x}\, d\xi$$
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

Einsetzen liefert:
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i\xi z}\, dz\right) e^{-c^2\xi^2 t}\, e^{i\xi x}\, d\xi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2\xi^2 t}\, e^{-i\xi(z-x)}\, d\xi\right)}_{=\mathcal{F}\left[e^{-c^2 t x^2}\right](z-x)} dz$$
$$\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, K(t, z-x)\, dz}$$

mit <u>Wärmeleitungskern</u>
$$\boxed{K(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}}$$

Es gilt:
1) $K(t,x) > 0$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} K(t, z-x)\, dz = 1$
3) Ist $f \equiv C$, so $u(x,t) = C$.

4) Auch wenn $f=0$ ausserhalb eines Intervals, so ist $u(x,t)>0$ für alle $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Ein Signal verbreitet sich also unendlich schnell.

Bsp.: Zur Zeit $t=0$ werden zwei identische homogene Stäbe zusammengefügt, die anfänglich unterschiedliche, konstante Temperatur haben. Sie berühren sich im Punkt $x=0$.
Wie ist die Temperaturverteilung für $t>0$?
Wir lösen:

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & , x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} T_1, & x>0 \\ T_2, & x\leq 0 \end{cases}$$

Annahme: $\boxed{T_1 = -T_2 \equiv T}$ ($\leadsto$ Rechnung einfacher).

Lösung:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{0} (-T)\, K(t, z-x)\, dz + \int_{0}^{\infty} T\, K(t, z-x)\, dz$$

$$= \underbrace{\frac{-T}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(z-x)^2}{4c^2 t}}\, dz}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\frac{T}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(z-x)^2}{4c^2 t}}\, dz}_{(\mathrm{II})}$$

In (I) substituieren wir $y = \frac{x-z}{\sqrt{2c^2t}}$ und erhalten:

$$(I) = \frac{-T}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2c^2t}}} -\sqrt{2c^2t}\, e^{-y^2/2}\, dy$$

$$= \frac{-T}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2c^2t}}}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

In II substituieren wir $y = \frac{z-x}{\sqrt{2c^2t}}$ und erhalten

$$(II) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2c^2t}}}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

Somit ist

$$(I) + (II) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2c^2t}}}^{\frac{x}{\sqrt{2c^2t}}} e^{-y^2/2}\, dy$$

Seien $\boxed{T_1, T_2 \text{ beliebig.}}$
Genügt u der Gleichung $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ mit $u(x,0) = f(x)$ so genügt $u - C = \tilde{u}$ der Gleichung $\tilde{u}_t - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0$ mit $\tilde{u}(x,0) = f(x) - C = \tilde{f}(x)$.
Wir wählen

$$C = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

dann ist

$$\tilde{f}(x) = f(x) - C = \begin{cases} T & , \; x > 0 \\ -T & , \; x \leq 0 \end{cases}$$

mit $T = \frac{T_1 - T_2}{2}$

Die Lösung ist also

$$u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2c^2t}}}^{\frac{x}{\sqrt{2c^2t}}} e^{-y^2/2}\, dy}_{= \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2c^2t}}\right)},$$

Es gilt $\operatorname{erf}(x') \to \pm 1$ wenn $x' \to \pm\infty$, also für alle $t > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = T_1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = T_2 .$$

Dies haben wir erwartet!