8. Nov. 2018

Letzte Woche?

- Die Fourier-Transformation:
  Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung.

Heute?

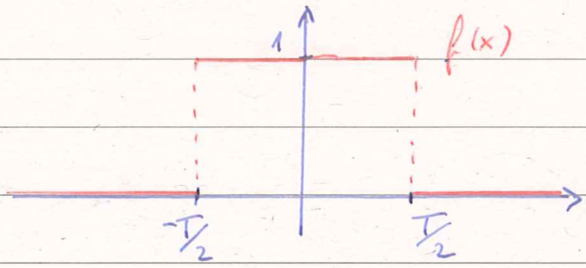
- Anwendung auf die Wellengleichung.
  Beispiele.

Beispiele für die Berechnung von Fourier-Transformierten.

1. Die charakteristische Funktion eines Intervalls.

Für $T > 0$ definieren wir die Funktion

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-T/2,\, T/2]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Wir berechnen die Fourier-Transformierte.

$$\mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-T/2,\, T/2]}](\xi) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-T/2}^{x=T/2}$$

$$= \frac{-e^{-\frac{i\xi T}{2}} + e^{\frac{i\xi T}{2}}}{i\xi} = \frac{2i\sin\left(\frac{\xi T}{2}\right)}{i\xi} = \frac{\sin\left(\frac{\xi T}{2}\right)}{\xi/2}$$

$$=: T \operatorname{sinc}\left(\frac{T\xi}{2}\right)$$

wobei $\operatorname{sinc}(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Für ein beliebiges Intervall setze $c = \frac{a+b}{2}$, $T = b-a$.
Es ist $\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \tau_c \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$

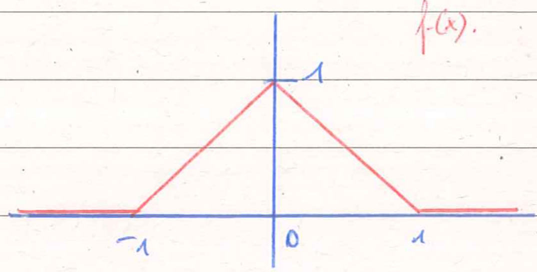
$$\mathcal{F}[\mathbb{1}_{[a,b]}](\xi) = e^{-ic\xi}\, 2\xi^{-1} \sin\left(\frac{T\xi}{2}\right)$$

$$= e^{-i\xi(a+b)/2}\, 2\xi^{-1} \sin\left(\frac{(b-a)\xi}{2}\right).$$

2. Dreiecksfunktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = (1-|x|)^+ := \sup(1-|x|, 0)$$
$$= \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1 \end{cases}$$



$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{-ix\xi}\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} (1+x) e^{-ix\xi}\, dx}_{\text{Subst. } x \rightsquigarrow -x} + \int_{0}^{1} (1-x) e^{-ix\xi}\, dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\left(e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}\right) dx$$

$u = 1-x \quad v' = \cos x\xi$

$u' = -1 \quad v = \frac{1}{\xi} \sin x\xi$

$$= 2\int_0^1 (1-x) \cos(x\xi)\, dx$$

$$= \underbrace{2\, \frac{\sin(\xi x)}{\xi} (1-x) \Big|_0^1}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{\xi} \int_0^1 \sin(\xi x)\, dx}_{= \frac{-2}{\xi^2} \cos(\xi x) \big|_0^1}$$

$$= \frac{2 - 2\cos\xi}{\xi^2} = 4\, \frac{\sin^2(\xi/2)}{\xi^2}$$

$$= \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Anwendung: Lösung der Wellengleichung auf $\mathbb{R}$.

Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung auf $\mathbb{R}$ lautet:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Wir betrachten die Fourier-Transformierte von u bezüglich x. Es gilt:

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\xi x} dx$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

Wir differenzieren unter dem Integral:

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_{tt}(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t) (i\xi)^2 e^{i\xi x} d\xi$$

Es folgt, dass $\hat{u}(\xi,t)$ das folgende Anfangswertproblem erfüllt:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\xi,t) + c^2\xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 & , \xi \in \mathbb{R}, t > 0. \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{g}(\xi) \end{cases}$$

Die Lösung ist

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(c\xi t) + B(\xi)\sin(c\xi t)$$

Es ist

$$\hat{u}(\xi,0) = A(\xi) = \hat{f}(\xi)$$
$$\hat{u}_t(\xi,0) = c\xi B(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

also

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(c\xi t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{c\xi}\sin(c\xi t).$$

Nun erhalten wir

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\cos(c\xi t)\,e^{i\xi x}\,d\xi}_{(III)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)\,\frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}\,e^{i\xi x}\,d\xi}_{(IV)}$$

Es ist

$$\cos(c\xi t) = \frac{e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}}{2}$$

$$\frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} = \int_0^t \cos(c\xi s)\,ds$$

Also

$$(III) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)\,e^{i\xi(x+ct)}\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)\,e^{i\xi(x-ct)}\,d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big)$$

$$(iv) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \left(\int_0^t \cos(c\xi s)\, ds \right) e^{i\xi x}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \cos(c\xi s)\, e^{i\xi x}\, d\xi \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \left(e^{i\xi(x+cs)} + e^{i\xi(x-cs)} \right) d\xi \right) ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^t g(x+cs)\, ds + \int_0^t g(x-cs)\, ds \right]$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

Substitution

Also ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

Dies ist die Formel von d'Alembert.