15. Nov. 2018

Letzte Woche?

- Beispiele zur Berechnung von Fourier-Transformierten.
- Anwendung: Wellengleichung.

Heute?

- Anwendung: Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung.
- Eigenschaften der Wellengleichung.

Lösen einer ODE.

ODE zweiter Ordnung (linear).

$$-u''(x) + u(x) = e^{-2|x|}.$$

Fourier-Transformierte beider Seiten:

$$(\xi^2+1)\mathcal{F}[u](\xi) = \mathcal{F}[e^{-2|x|}](\xi).$$

Es ist für $a>0$

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-i\xi x}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-a-i\xi)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-a-i\xi} e^{(-a-i\xi)x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\xi}\Big(1-\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-ax}}_{\downarrow 0}\cdot e^{i\xi x})\Big) + \frac{1}{-a-i\xi}\Big(\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{-ax}}_{\downarrow 0}\cdot e^{-i\xi x})-1\Big)$$

$$= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.$$

Somit erhalten wir

$$(\xi^2+1)\,\mathcal{F}[u](\xi) = \frac{4}{4+\xi^2}$$

und

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \frac{1}{\xi^2+1}\cdot\frac{4}{\xi^2+4}$$

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{\xi^2+1}\Big] * \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{4}{\xi^2+4}\Big].$$

$$= \frac{e^{-|x|}}{2} * e^{-2|x|}.$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\, e^{-2|y|}\,dy.$$

Für

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\, e^{-2|y|}\, dy$$

machen wir Fallunterscheidungen.

$x \geq 0$:

$$|x-y| + 2|y| = \begin{cases} y+x, & 0 \leq y \leq x \\ x-3y, & y<0 \\ 3y-x, & y>x \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-3y)}\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-(y+x)}\,dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty} e^{-(3y-x)}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{+1}{3} e^{-x+3y}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-y-x}\Big|_{0}^{x} - \frac{1}{3} e^{-3y+x}\Big|_{x}^{\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} e^{-x} - e^{-2x} + e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-2x} \right)$$

$$= \frac{2}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-2x}$$

$x < 0$:

$$|x-y| + 2|y| = \begin{cases} -y-x, & x \leq y \leq 0 \\ x-3y, & y<x \\ 3y-x & y>0 \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-3y)}\,dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{0} e^{y+x}\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(3y-x)}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} e^{3y-x}\Big|_{-\infty}^{x} + e^{y+x}\Big|_{x}^{0} - \frac{1}{3} e^{x-3y}\Big|_{0}^{\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} e^{2x} + e^{x} - e^{2x} + \frac{1}{3} e^{x} \right)$$

$$= \frac{2}{3} e^{x} - \frac{1}{3} e^{2x}$$

Die Wellengleichung.

Die homogene Wellengleichung in einer (Raum-) Dimension kennen wir schon:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , \; x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0.$$

Es bezeichnet $c \in \mathbb{R}$ die Wellengeschwindigkeit.

Wir führen neue Variablen ein:

$$\xi = x + ct \quad \text{und} \quad \eta = x - ct.$$

und setzen

$$w(\xi, \eta) := u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)).$$

Die Kettenregel für

$$u(x,t) = w(x+ct, x-ct)$$

liefert

$$u_t = w_\xi \xi_t + w_\eta \eta_t = c(w_\xi - w_\eta)$$
$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x = w_\xi + w_\eta$$

$$u_{tt} = c^2(w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta})$$
$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$

also

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 w_{\xi\eta} = 0$$

Da somit $(w_\xi)_\eta = 0$ ist, folgt $w_\xi = f(\xi)$ und

$$w = \int f(\xi)\, d\xi + G(\eta)$$

Die allgemeine Lösung von $w_{\xi\eta} = 0$ hat die Form

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

$F, G \in C^2(\mathbb{R})$. (2-mal stetig diff'bar).

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \qquad (*)$$
$$(x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ist u eine Lösung, so gibt es $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ so, dass $(*)$ gilt. Umgekehrt ist für gegebene F, G die Funktion u (wie in $(*)$ definiert) eine Lösung der Wellengleichung. Der Graph ist gegeben durch zwei Wellen, die sich ohne Änderung ihrer Form mit Geschwindigkeit c in entgegengesetzter Richtung entlang der x-Achse bewegen.

Wir betrachten das Cauchy-Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad (**)$$

Um $(**)$ zu lösen, bestimmen wir F, G in $(*)$ so, dass die Anfangsbedingungen in $(**)$ erfüllt sind:

$$F(x) + G(x) = f(x)$$
$$cF'(x) - cG'(x) = g(x).$$

Wir integrieren die zweite Formel und erhalten

$$F(x) - G(x) - (F(0) - G(0)) = \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy$$

9.6

Wir können o.B.d.A annehmen, dass $F(0) = G(0)$ (sonst addieren wir eine Konstante) und erhalten

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy \,. \qquad (\Delta)$$

Aus (Δ) und $F(x) + G(x) = f(x)$ folgt nun

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy\right)$$

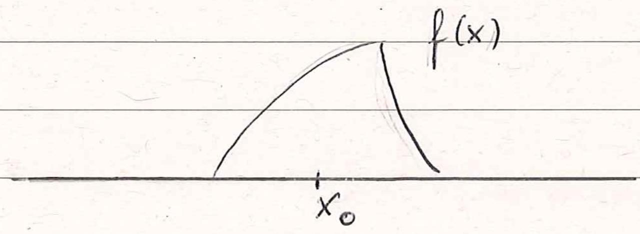
$$G(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\,dy\right).$$

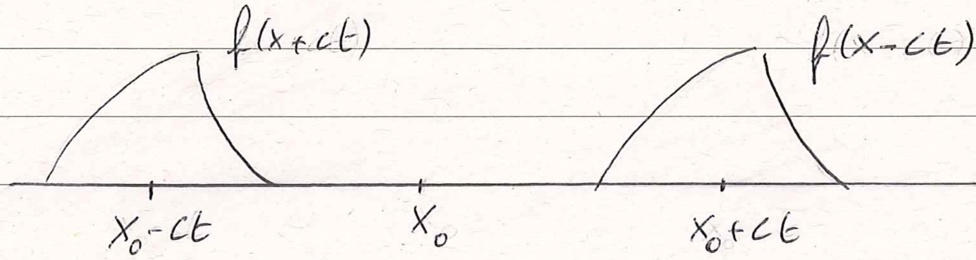
Es gilt nun

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} g(y)\,dy - \int_0^{x-ct} g(y)\,dy\right)$$

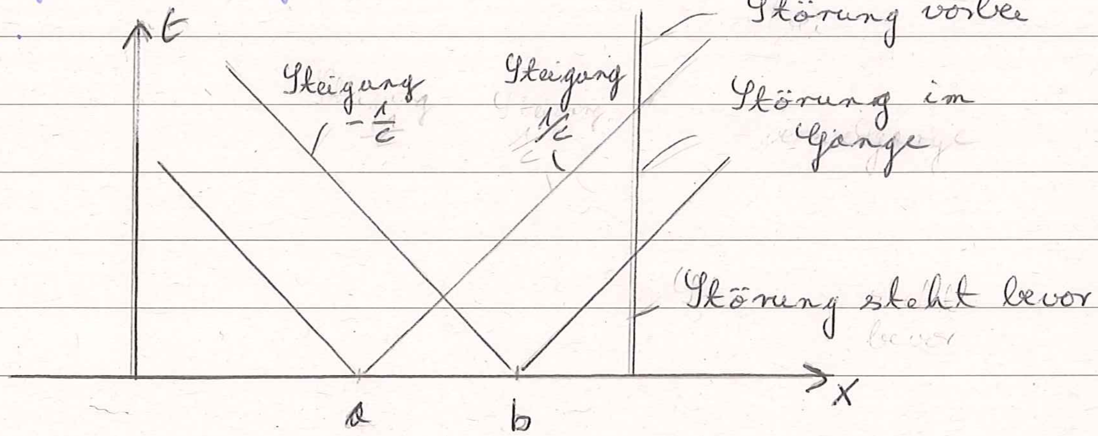
$$= \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

Dies ist die d'Alembert'sche Formel.





Betrachte den Fall $g \equiv 0$.
Sei $t > 0$ fest. Dann sind $x \mapsto f(x-ct)$ und $x \mapsto f(x+ct)$ verschobene Graphen von f.
Die Funktion $u(x,t)$ ist Superposition einer mit Geschwindigkeit c nach links und einer mit Geschwindigkeit c nach rechts laufenden Welle.



Für $g \equiv 0$ kann man d'Alembert wie folgt schreiben:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u(x+ct,0) + u(x-ct,0)\right)$$

Dies ist das arithmetische Mittel der Anregungen in $x-ct$ und $x+ct$ zur Zeit 0.

Bemerkungen:

1) Nach der Formel von d'Alembert wird $u(x,t)$ an der Stelle (x_0,t_0) eindeutig durch die Werte von f und g im Intervall $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ bestimmt. Dies ist das

Abhängigkeitsgebiet

der Lösung in (x_0, t_0).

2) Die Werte von f, g an der Stelle $(\xi, 0)$ beeinflussen u innerhalb des Kegels

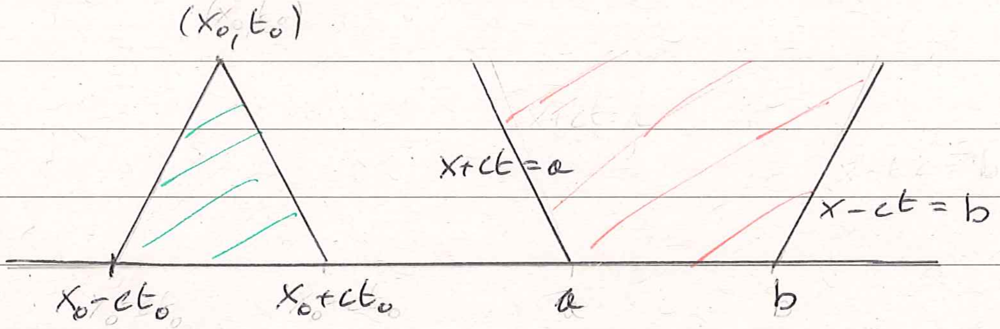
$$\xi - ct \leq x \leq \xi + ct \quad , \; t \geq 0$$

Diesen Kegel nennt man das

Einflussgebiet

des Punktes $(\xi, 0)$.

$\Rightarrow$ Störungen und Signale reisen mit Geschwindigkeit c.



Abhängigkeitsgebiet　　　Einflussgebiet