10.1

22. Nov. 2018

Zusammenfassung der Vorlesung.

11.1

29. Nov. 2018

- Die Methode von Duhamel.
- Die Laplace-Gleichung.

Die Methode von Duhamel

Wir betrachten inhomogene lineare Gleichungen wie

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \\ u_t(x,0) = g(x) & \end{cases} \qquad (\Delta)$$

Hier wirkt eine äussere Kraft F auf eine sehr lange Saite.

Für jede Anfangszeit $s \geq 0$ betrachten wir

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > s \\ v(x,s) = 0 & , x \in \mathbb{R} \\ v_t(x,s) = F(x,s) & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (*)$$

Es ist v genau dann eine Lösung von $(*)$, wenn die Funktion $w(x,t) := v(x, t+s)$ eine Lösung ist von

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x,0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) = F(x,s) & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (**)$$

Ist umgekehrt $w = w(x,t)$ eine Lösung von $(**)$, so ist $v(x,t) := w(x, t-s)$ eine Lösung von $(*)$.

Mit Hilfe der d'Alembert'schen Formel erhalten wir

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F(\xi, s)\, d\xi .$$

und somit eine Lösung von (*) für $t \geq s \geq 0$:

$$v(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s)\, d\xi =: u(x,t;s).$$

<u>Satz</u>: Eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & , x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (\Delta\Delta)$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s)\, ds \quad , x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \qquad (\circ)$$

mit

$$u(x,t;s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s)\, d\xi .$$

Das inhomogene Problem kann man sich als Menge homogener Probleme vorstellen von denen jedes zu einer anderen Zeit s startet. Man addiert deren Lösungen (integriert) über s, um eine Lösung des inhomogenen Problems zu erhalten.

Nun kann man jede Lösung von (Δ) als $u = u_1 + u_2$ schreiben (Superpositionsprinzip), wobei u_1 eine Lösung von ($\Delta\Delta$) und u_2 eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ist.

Kombiniert man die d'Alembert'sche Formel und (o), so erhält man

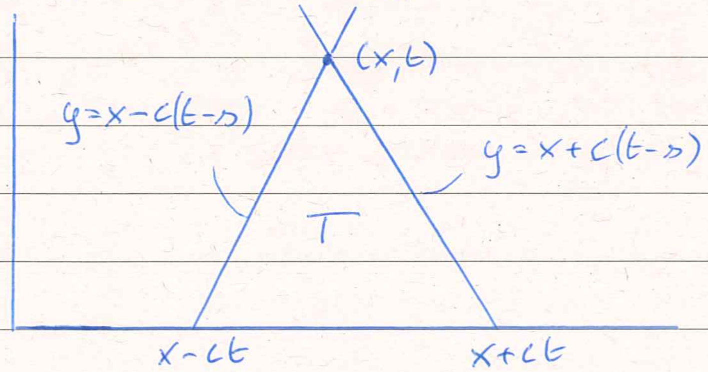
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,dy\right) ds$$

$$= \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2c}\iint_T F(y,s)\,dy\,ds$$

wobei

$$T = \{(y,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le t,\ |y-x| \le c(t-s)\}$$

das charakteristische Dreieck durch (x,t) ist.



Die Laplace - Gleichung

Wir studieren jetzt zeitunabhängige Phänomene. Typische Beispiele liefert die Elektrostatik, deren Grundgleichung die Poisson - Gleichung ist, die das elektrostatische Potential $u(x)$ und die Ladungsdichte $\rho(x)$ verbindet:

$$\Delta u = -4\pi\rho \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} .$$

Das elektrische Feld ist $E = -\operatorname{grad} u$. Da $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, ist diese Gleichung das Gaußsche Gesetz $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$.

In einem Gebiet, wo es keine Ladung gibt, erfüllt das Potential u die Laplace - Gleichung

$$\Delta u = 0 .$$

Das Dirichlet - Problem ist ein Randwertproblem für die Laplace - Gleichung auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ mit glattem Rand ∂D:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad , \quad x \in D \\ u(x) &= f(x) \quad , \quad x \in \partial D . \end{aligned}$$

Allgemein spielt die Poisson - Gleichung eine wichtige Rolle in der Theorie konservativer Felder: (elektrisch, magnetisch, Gravitation), wo das Vektorfeld Gradient eines Potentials ist.

Die Laplace-Gleichung in der Halbebene

Wir arbeiten auf der oberen Halbebene:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}.$$

Wir betrachten:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & , x\in\mathbb{R}, y>0 \\ u(x,0)=f(x) & , x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Wir möchten, dass $u(x,y)$ beschränkt ist für $y\to\infty$.

Wir nehmen die Fourier-Transformierte bzgl. x mit y als Parameter und erhalten aus $\Delta u=0$

$$\hat{u}_{yy}-\xi^2\hat{u}=0.$$

Dies hat die allgemeine Lösung

$$\hat{u}(\xi,y)=a(\xi)e^{-|\xi|y}+b(\xi)e^{|\xi|y}.$$

Aus der Beschränktheit folgt $b(\xi)=0$ für alle $\xi\in\mathbb{R}$.

$$\hat{u}(\xi,y)=a(\xi)e^{-|\xi|y}$$

Wendet man die Fourier-Transformation auf die Randbedingung an, so erhält man

$$\hat{u}(\xi,0)=\alpha(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi) \quad , \text{ also}$$

$$\alpha(\xi)=\hat{f}(\xi).$$

Somit ist die Lösung für die Fourier-Transf.:

$$\hat{u}(\xi,y)=\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Die Lösung ist die Rücktransformierte

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Wir betrachten

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{f}(\xi)\cdot e^{-|\xi|y}}_{\text{Produkt}}\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

also

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-y|\xi|}] \overset{\text{Faltung}}{*} f$$

Berechne $\mathcal{F}^{-1}[e^{-y|\xi|}]$, $y>0$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-y|\xi|}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|\xi|}\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{y\xi} e^{ix\xi}\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-y\xi} e^{ix\xi}\, d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(y+ix)\xi}\, d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{(-y+ix)\xi}\, d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{y-ix}{x^2+y^2}\, e^{\overset{y>0}{(y+ix)\xi}}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{-y-ix}{x^2+y^2}\, e^{\overset{-y<0}{(-y+ix)\xi}}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{y-ix}{x^2+y^2}\Big(1-\underbrace{\lim_{\xi\to+\infty} e^{-y\xi-ix\xi}}_{=0}\Big) + \frac{-y-ix}{x^2+y^2}\Big(-1+\underbrace{\lim_{\xi\to\infty} e^{-y\xi+ix\xi}}_{=0}\Big)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}$$

Damit ist

$$u(x,y) = \left(\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right) * f.$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}\, d\tau.$$