6. Dez. 2018

Letzte Woche?

- Das Duhamel-Prinzip
- Die Laplace-Gleichung
  Bsp. Halbebene.

Heute?

- Die Laplace-Gleichung auf der Halbebene.
- Die Laplace-Gleichung in der Kreisscheibe.

Die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe

Wir betrachten die Kreisscheibe

$$B_a((0,0)) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a\}$$

mit $a > 0$.

Wir lösen das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & , x^2+y^2 \leq a \\ u(x,y) = f(x,y) & , x^2+y^2 = a \end{cases}$$

Schritt 1: Führe Polarkoordinaten ein.

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Wir haben

$$M := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \underbrace{(\det(M))^{-1}}_{\frac{1}{r}} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r^{-1}\sin(\theta) & r^{-1}\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{-1}x & r^{-1}y \\ -r^{-2}y & r^{-2}x \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

Sei

$$u(x,y) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = v(r,\theta).$$

Die Kettenregel liefert:

$$u_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x$$
$$u_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y$$

$$u_{xx} = v_{rr} r_x^2 + 2v_{r\theta} r_x \theta_x + v_r r_{xx} + v_{\theta\theta} \theta_x^2 + v_\theta \theta_{xx}$$
$$= v_{rr} \frac{x^2}{r^2} - 2v_{\theta r} \frac{xy}{r^3} + v_r \frac{y^2}{r^3} + v_{\theta\theta} \frac{y^2}{r^4} + v_\theta \frac{2xy}{r^4}.$$

$$u_{yy} = v_{rr} r_y^2 + 2v_{r\theta} r_y \theta_y + v_r r_{yy} + v_{\theta\theta} \theta_y^2 + v_\theta \theta_{yy}$$
$$= v_{rr} \frac{y^2}{r^2} + 2v_{r\theta} \frac{xy}{r^3} + v_r \frac{x^2}{r^3} + v_{\theta\theta} \frac{x^2}{r^4} - v_\theta \frac{2xy}{r^4}.$$

Somit ist

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}$$

Schritt 3: Löse das Problem in Polarkoordinaten.

Wir setzen

$$\tilde{f}(\theta) = f(a\cos(\theta), a\sin(\theta))$$

Bem: $\tilde{f}$ ist 2π-periodisch.

Dies führt uns zum folgenden Problem:

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 & , \ 0 < r < a, \ 0 < \theta < 2\pi \\ v(a,\theta) = \tilde{f}(\theta) & , \ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Wir wenden die Methode der Separation der Variablen an.

Wir setzen:

$$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

mit $R \in C^2((0,a)) \cap C([0,a])$ und $\Theta \in C^2(\mathbb{R})$, 2π-periodisch.
Wir leiten ab und setzen dies in die PDE ein:

$$r^2 R''(r)\Theta(\theta) + rR'(r)\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda .$$

Wir lösen zuerst die Gleichung für Θ:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \end{cases}$$

Da wir periodische Lösungen möchten, sind die zulässigen Werte von λ die $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$.
Die Lösungen sind:

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta).$$

Nun lösen wir die Gleichung für R:

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0.$$

Fall $n=0$: Es gilt

$$r^2R'' + rR' = 0 \iff (rR')' = 0$$

(da dies für alle r gelten muss).

$$\iff R(r) = c_1 \ln r + c_2$$

Wir suchen Lösungen mit endlichem Limes für $r \to 0^+$, also wählen wir $c_1 = 0$.

Fall $n > 0$:

Setze $r = e^x$ und $S(x) = R(e^x)$.

Dann ist $S'' = (e^x)^2 \cdot R'' + e^x R'$ und

$$S''(x) - n^2 S(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung ist

$$S(x) = c_n e^{nx} + d_n e^{-nx}.$$

Daher ist

$$R(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}.$$

Da die Lösung für $r \to 0^+$ endlichen Grenzwert haben soll, wählen wir $d_n = 0$.

Für jedes $n \geq 0$ finden wir

$$v_n(r, \theta) = r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

Wir erfüllen die Randbedingung durch Superposition der Lösungen v_n:

$$v(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

mit

$$\tilde{f}(\theta) = v(a, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

Dies ist die Fourier-Reihe für $\tilde{f}$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\, d\theta'$$

$$a^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta') \cos(n\theta')\, d\theta'$$

$$a^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta') \sin(n\theta')\, d\theta'.$$

Damit ist

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\, d\theta'$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\left[\cos(n\theta')\cos(n\theta) + \sin(n\theta')\sin(n\theta)\right] d\theta'$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos(n(\theta-\theta'))\right] d\theta'$$

geom. Reihe

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\left(\frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{a}\cos(\theta-\theta')}\right) d\theta'$$

Wir erhalten die folgende Darstellung in Polarkoordinaten:

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\, P\left(\frac{r}{a}, \theta-\theta'\right) d\theta'$$

wobei für alle q, t:

$$P(q,t) = \frac{1-q^2}{1-2q\cos t + q^2}.$$

P heisst "Poisson-Kern"

Für $r=0$ erhalten wir

$$v(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta')\, d\theta'$$

also ist der Wert der Lösung im Ursprung gleich dem Durchschnitt auf dem Kreis $x^2+y^2=a^2$.

Dies ist die <u>Mittelwerteigenschaft</u>.