13. Dez. 2018

Letzte Woche?

Lösung der Laplace-Gleichung:
- auf der oberen Halbebene
- auf der Kreisscheibe.

Heute?

Die Laplace-Gleichung
- auf der Kreisscheibe.
- auf dem Rechteck.

Nächste Woche?
- Mittelwertprinzip.
- Maximum- und Minimumprinzip.

<u>Beispiel</u>: Löse das folgende Problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } x^2+y^2<1 \\ u(x,y) = y^2 & \text{auf } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

<u>Lösung:</u> Wir betrachten das Problem in Polarkoordinaten und suchen eine Lösung der Form

$$v(r,\theta) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Das Problem wird

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 & , 0<r<1, \ 0<\theta<2\pi \\ v(1,\theta) = \sin^2(\theta) & , 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Wir finden

$$v(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta')\, d\theta'$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta') \cos(n\theta')\, d\theta'$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta') \sin(n\theta')\, d\theta'$$

Es ist

$$\sin^2(\theta') = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta'))$$

Damit ist

$$b_n = 0 \quad \text{für alle } n \geq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = 0 \quad \text{für } n \neq 0, 2$$

also $v(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r^2 \cos(2\theta)$ und in kartesischen Koordinaten

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2+y^2).$$

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck.

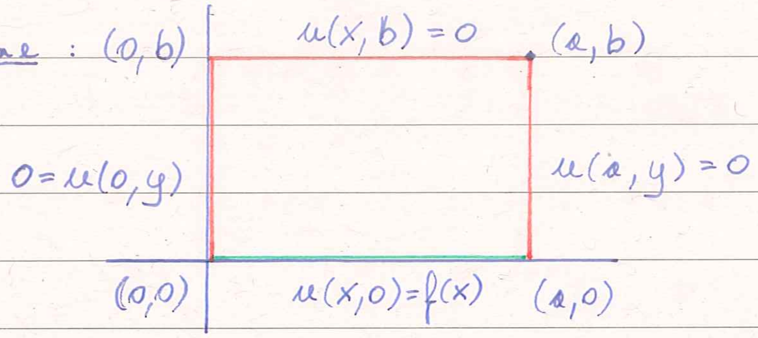
Wir betrachten ein Rechteck vom Typ

$$R = [0,a] \times [0,b]$$

und lösen das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf R.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } (0,a) \times (0,b) \\ u(x,y) = f(x) & \text{auf } \partial R. \end{cases}$$

<u>Annahme</u> :



Auf den Kanten $\{0\} \times [0,b]$, $\{a\} \times [0,b]$ und $[0,a] \times \{b\}$ gilt $f \equiv 0$. Es ist $f \not\equiv 0$ auf der Kante $[0,a] \times \{0\}$ und $f(0,0) = f(a,0) = 0$.

Wir wenden die Methode der Separation der Variablen an:

$$u(x,y) = U(x)\, V(y)$$

Damit ist

$$u_{xx} = U''(x)\, V(y)$$

$$u_{yy} = U(x)\, V''(y)$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$U''(x)\, V(y) + U(x)\, V''(y) = 0$$

also

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = -\frac{V''(y)}{V(y)} = \lambda$$

Wir erhalten die Differentialgleichungen

$$U''(x) - \lambda U(x) = 0 \quad \text{und}$$

$$V''(y) + \lambda V(y) = 0$$

Betrachte die Randbedingungen:

Für $0<y<b$ ist

$$U(0)V(y) = U(a)V(y) = 0.$$

also

- $V(y) \equiv 0 \quad \rightsquigarrow \quad u(x,y) \equiv 0$

oder

- $U(0) = U(a) = 0$

Wie im Fall der Wärmeleitungsgleichung ist

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad U_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Nun ist die Gleichung für V:

$$V''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2}V(y) = 0$$

Diese besitzt die Fundamentallösungen:

$$e^{\omega y}, \quad e^{-\omega y} \quad \text{mit } \omega = \frac{n\pi}{a}.$$

Als Linearkombinationen dieser Lösungen sind auch die Funktionen

$$\sinh(\omega y) = \tfrac{1}{2}(e^{\omega y} - e^{-\omega y}),$$

$$\cosh(\omega y) = \tfrac{1}{2}(e^{\omega y} + e^{-\omega y})$$

Lösungen. Somit ist

$$V_n(y) = c_1 \sinh(\omega y) + c_2 \cosh(\omega y)$$

Aus $V(b) = 0$ folgt

$$V_n(y) = c \sinh(\omega(y-b))$$

Wir suchen nach einer Lösung der Form

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

Da $u(x,0) = f(x)$, erhalten wir

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}\cdot(-b)\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Es ist sinh eine ungerade Funktion, also

$$c_n = \frac{-2}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Analog löst man das Dirichlet-Problem in einem Rechteck mit Randbedingungen die 0 sind bis auf einer anderen der 4 Kanten. Das Superpositionsprinzip liefert dann die Lösung für beliebige Randbedingungen.

Auf den folgenden beiden Seiten werden die Formeln

- für die obere Kante

und

- für die linke und die rechte Kante

bestimmt.

Der Fall mit $f \neq 0$ auf der Kante $[0,a] \times \{b\}$ löst sich analog.
Aus $V(0) = 0$ folgt

$$V_n(y) = c \sinh(\omega y)$$

und man sucht nach Lösungen der Form

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

Da $u(x,b) = f(x)$, erhalten wir

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

also

$$c_n = \frac{2}{a \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

Für die anderen beiden Kanten betrachten wir die Randbedingungen: Für $0 < x < a$ ist

$$U(x) V(0) = U(x) V(b) = 0$$

also

- $U(x) = 0 \rightsquigarrow u(x,y) = 0$

oder

- $V(0) = V(b) = 0$.

Es ist dann

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad V_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Nun ist die Gleichung für U

$$U''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} U(x) = 0$$

also

$$U_n(x) = c_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + c_2 \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

Aus $U(a) = 0$ folgt

$$U_n(x) = c \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right)$$

Wir suchen nach Lösungen der Form

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Da $u(0,y) = f(y)$ erhalten wir

$$c_n = \frac{-2}{b \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy$$

Analog für die letzte Kante.
Aus $U(0) = 0$ folgt

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

und mit $u(a,y) = f(y)$

$$c_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy.$$

Zwei Eigenschaften harmonischer Funktionen.

Mittelwertprinzip:

Ist u harmonisch ($\Delta u = 0$) in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so ist der Wert $u(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, gleich dem Mittelwert von u auf dem Rand der Kreisscheibe in Ω mit Mittelpunkt in (x,y):

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B((x,y),a)} u(x',y')\, d\sigma$$

Dies ist analog auch gültig in Dimensionen $n \geq 3$.

Maximum- und Minimumprinzip.

Ist $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch ($\Delta u = 0$) in einer offenen beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so ist

$$\max\{u(x,y)\ ,\ (x,y) \in \bar{\Omega}\} = \max\{u(x,y)\ ,\ (x,y) \in \partial\Omega\}$$

und

$$\min\{u(x,y)\ ,\ (x,y) \in \bar{\Omega}\} = \min\{u(x,y)\ ,\ (x,y) \in \partial\Omega\}$$

Dies heißt, dass das Maximum oder Minimum auf dem Rand angenommen wird

Bem.: Es ist $C(\bar{\Omega})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\bar{\Omega}$ und $C^2(\Omega)$ die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω.