Mathematik III
Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

11. Oktober 2018

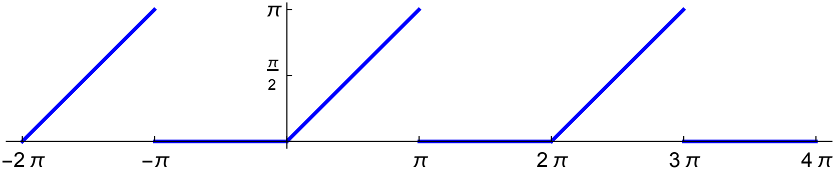
Was haben wir letzte Woche gelernt?

- T-periodische Funktionen
- Fourier-Reihen

Beispiel: "Sägezahnfunktion"

Bestimme die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung von $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$



Es ist

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

wobei für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{\big((-1)^n - 1\big)}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{-2}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{-(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{-1}{n}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir erhalten die Fourier-Reihe

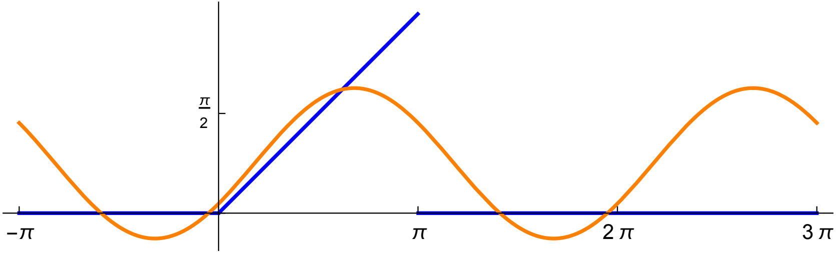
$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^n - 1)}{n^2 \pi} \cos(nx) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \right) .$$

Ihre Partialsummen sind die Fourier-Polynome

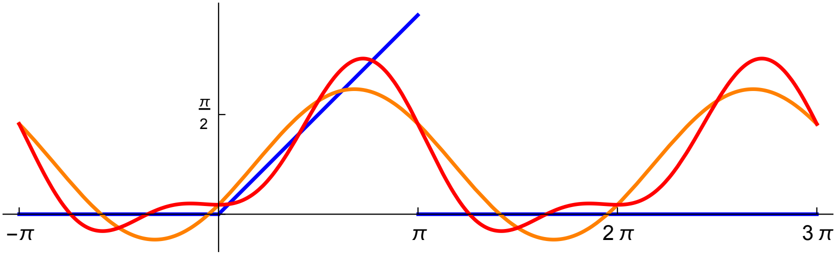
$$f_{\color{red}N}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\color{red}N} \left(\frac{((-1)^n - 1)}{n^2 \pi} \cos(nx) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \right) .$$

Sie stellen mit wachsendem N eine immer bessere Näherung von $f(x)$ dar.

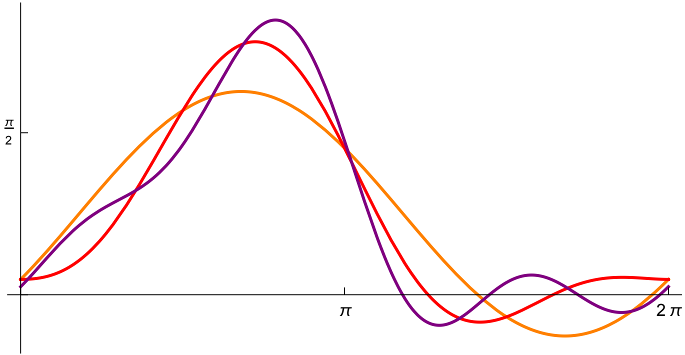
$$f_1(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos(x) + \sin(x)$$



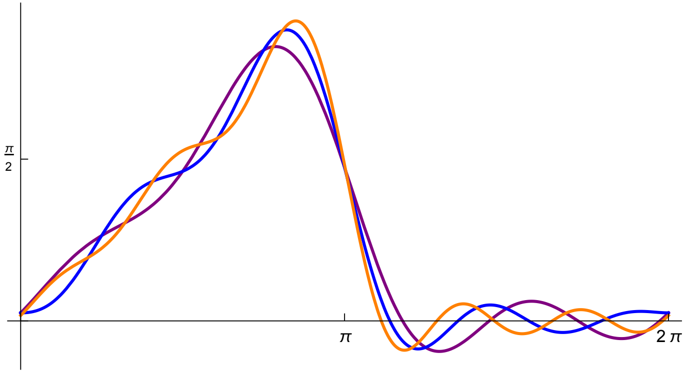
$$\color{red}{f_2(x)} = \underbrace{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos(x) + \sin(x)}_{\color{orange}{f_1(x)}} - \frac{1}{2}\sin(2x)$$



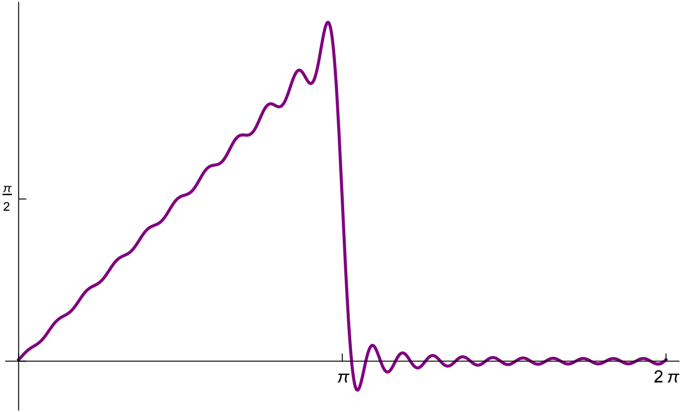
$$f_3(x) = \underbrace{\overbrace{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos(x) + \sin(x)}^{f_1(x)} - \frac{1}{2}\sin(2x)}_{f_2(x)} - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$



$$\color{orange}{f_5(x)} = \underbrace{\color{purple}{f_3(x)} - \frac{1}{4}\sin(4x)}_{\color{blue}{f_4(x)}} - \frac{2}{25\pi}\cos(5x) + \frac{1}{5}\sin(5x)$$



$f_{21}(x)$



Aufgabe

PDE $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$ Wellengleichung

BC $$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{für alle } t$$ Randbedingungen

IC $$u(x,0) = f(x)$$ $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$ Anfangsbedingungen

Separation der Variablen: Schritt 1

Schritt 1: Produktansatz für die Lösung der PDE

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

liefert die ODEs

$$X'' - kX = 0 \quad \& \quad T'' - kc^2 T = 0.$$

Dies sind ODEs für $X(x)$ und $T(t)$.

Separation der Variablen: Schritt 2

Löse die ODEs, so dass das Produkt XT die Randbedingungen BC erfüllt. Für $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ erhalten wir die Basislösungen

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left(C_n\cos\lambda_n t + D_n\sin\lambda_n t\right),$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Separation der Variablen: Schritt 3

Betrachte formelle Lösungen der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t) \Big) \cdot \sin\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big)$$

Es ist $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$. Wähle A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$, so dass die IC

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x)\,. \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Es ist

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \lambda_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$$

Die Formeln für die Fourier-Koeffizienten liefern

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)dx$$

$$B_n = \frac{2}{c\pi n}\int_0^L g(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)dx$$

$n = 1, 2, \ldots$