Mathematik III
Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

25. Oktober 2018

Was haben wir letzte Woche gelernt?

- Wärmeleitungsgleichung
- Nebenbedingungen

Heute?

- Nebenbedingungen
- Fourier-Transformation

Eindeutigkeit der Lösung

Ziel: Temperatur im Stab zu einem beliebigen Zeitpunkt eindeutig bestimmen.

Wir benötigen:

1. anfängliche Temperaturverteilung $\rightarrow$ IC $u(x, 0) = f(x)$
2. Randbedingungen am Stabende $\rightarrow$ BC
   - Enden auf konstanter Temperatur

     $$u(0, t) = U_0 \quad \text{und} \quad u(L, t) = U_L$$

     (homogene / inhomogene) Dirichlet-Randbedingungen

   - Enden isoliert, d.h. es findet kein Wärmetransport durch die Ränder statt

     $$u_x(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad u_x(L, t) = 0$$

     homogene Neumann-Randbedingungen (adiabatische Bedingungen).

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen: Schritt 1

Bestimme eine stationäre (also zeitunabhängige) Lösung von

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_p}{dx^2} = 0 \\ u_p(0) = U_0 \\ u_p(L) = U_L \end{cases}$$

Diese ist

$$u_p(x) = ax + b$$

$$b = U_0 \,, \quad a = \tfrac{U_L - U_0}{L}$$

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen: Schritt 2

Bestimme eine Lösung $u_H(x,t)$ von

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_H}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 u_H}{\partial x^2} \\
u_H(0,t) &= 0\,, \quad u_H(L,t) = 0 \\
u_H(x,0) &= f(x) - u_p(x)
\end{aligned}
$$

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

Dann ist

$$u(x,t) = u_p(x) + u_H(x,t)$$

Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = U_0\,, \quad u(L,t) = U_L$$

$$u(x,0) = f(x)$$

da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_H}{\partial t}\,, \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u_p + u_H)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_H}{\partial x^2}$$

und

$$u(0,t) = u_p(0) + u_H(0,t) = U_0\,, \quad u(L,t) = u_p(L) + u_H(L,t) = U_L\,,$$

$$u(x,0) = u_p(x) + u_H(x,0) = f(x)$$

Homogene Neumann-Bedingungen

$$\begin{array}{ll} \text{IC} & u(x,0) = f(x) \\ \text{BC} & u_x(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad u_x(L,t) = 0 \end{array}$$

Methode: Separation der Variablen

Schritt 1: Produktansatz $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

Homogene Neumann-Bedingungen: Schritt 2

Für alle t gilt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} T(t) = 0 \text{ für alle } t \\ \text{oder} \\ X'(0) = 0\,, \quad X'(L) = 0 \end{array}$$

Löse

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

Homogene Neumann-Bedingungen: Schritt 2

Löse

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

Interessant ist der Fall $k = -p^2 < 0$.

$$\begin{cases} X(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \qquad \text{also} \qquad \begin{cases} X'(x) = -Ap\sin(px) + Bp\cos(px) \\ B = 0 \\ pL = n\pi \end{cases}$$

Lösungen: $X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Bestimme $T(t)$ wie gewohnt.

Homogene Neumann-Bedingungen: Schritt 3

Setze

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{-\lambda_n^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

wobei $\lambda_n = \frac{n\pi x}{L}$.

Erfülle die IC:

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Wähle für A_0, A_n, $n = 1, 2, \ldots$, die Fourier-Koeffizienten der Cosinusreihe von $f(x)$.