Mathematik III

Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

29. November 2018

Die Wellengleichung auf $\mathbb{R}$

Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung auf $\mathbb{R}$ lautet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Die Lösung ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

Die Methode von Duhamel

Wir lösen

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Für jede Anfangszeit $s \geqslant 0$ betrachten wir

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, t > s \\ v(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x,s) = F(x,s)\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dies hat für $t \geqslant s \geqslant 0$ die Lösung:

$$v(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s)\, d\xi =: u(x,t;s)$$

Satz von Duhamel

Die Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s)\,ds\,, \quad x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$$

mit

$$u(x,t;s) := \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi,s)\,d\,\xi$$

Superposition

Eine Lösung u von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

erhält man durch Superposition einer Lösung u_1 von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

und einer Lösung u_2 von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u = u_1 + u_2$$