Mathematik III
Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

6. Dezember 2018

Die Wellengleichung auf $\mathbb{R}$

Die Lösung $u(x,t)$ des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

erhält man durch Superposition einer Lösung u_1 von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

und einer Lösung u_2 von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Die Methode von Duhamel

Die Lösung u_1 des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\, dy \right) ds\,, \quad x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\,.$$

Die Formel von d'Alembert

DIe Lösung u_2 von

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds\,.$$

Superposition

Die Lösung $u(x,t)$ des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,dy \right) ds\,. \end{aligned}$$

Die Laplace-Gleichung

Mit der Laplace-Gleichung betrachten wir ein Beispiel zeitunabhängiger Probleme. Diese Gleichung wird auch Potentialgleichung genannt. Beispiele für Anwendungen sind

- das elektrostatische Potential,
- das Gravitationspotential,
- ...

Allgemein spielt diese Gleichung eine wichtige Rolle in der Theorie konservativer Felder.

Die Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung verbindet das elektrostatische Potential $u(x)$ und die Ladungsdichte $\rho(x)$.

$$\Delta u = -4\pi\rho\,, \qquad \text{wobei } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Das elektrische Feld ist $E = -\operatorname{grad} u$. Da $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$, ist diese Gleichung das Gaußsche Gesetz

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho\,.$$

In einem Gebiet, wo es keine Ladung gibt, erfüllt das Potential u die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0\,.$$

Das Dirichlet-Problem

Das Dirichlet-Problem ist ein Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ mit glattem Rand ∂D:

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in D \\ u(x) = f(x)\,, & x \in \partial D\,. \end{cases}$$

Wir lösen dies für

- die Halbebene,
- die Kreisscheibe und
- auf einem Rechteck.

Die Laplace-Gleichung in der Halbebene

Auf der oberen Halbebene

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Es soll $u(x, y)$ beschränkt sein für $y \to \infty$.

Die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe

Auf der Kreisscheibe

$$B_a((0,0)) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant a\}$$

mit $a > 0$ lösen wir das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & x^2 + y^2 \leqslant a \\ u(x,0) = f(x)\,, & x^2 + y^2 = a\,. \end{cases}$$

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck

Wir betrachten das Rechteck vom Typ

$$R = [0, a] \times [0, b]$$

und lösen das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & \text{in } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f(x)\,, & \text{auf } \partial R\,. \end{cases}$$

Wir nehmen zuerst an, dass f auf allen bis auf einer Kante verschwindet.
Den allgemeinen Fall erhält man durch Superposition der Lösungen.