Mathematik III
Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

13. Dezember 2018

Das Dirichlet-Problem

Das Dirichlet-Problem ist ein Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ mit glattem Rand ∂D :

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, & x \in D \\ u(x) = f(x)\,, & x \in \partial D\,. \end{cases}$$

Wir lösen dies für

- die Halbebene,
- die Kreisscheibe und
- auf einem Rechteck.

Die Laplace-Gleichung in der Halbebene

Auf der oberen Halbebene

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Es soll $u(x, y)$ beschränkt sein für $y \to \infty$.

Die Laplace-Gleichung in der Halbebene

Wir betrachten die Fourier-Transformierte bezüglich x mit y als Parameter und erhalten aus $\Delta u = 0$ die Gleichung

$$\widehat{u}_{yy} - \xi^2 \widehat{u} = 0\,,$$

deren für $y \to \infty$ beschränkte Lösung ist

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y}$$

Die Lösung unseres Problems ist die Rücktransformierte

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{f}(\xi) \cdot e^{-|\xi| y}}_{\text{Produkt}} \; e^{i\xi x}\, d\xi \;=\; \underbrace{\mathcal{F}^{-1}[e^{-y|\xi|}] * f}_{\textit{Faltung}}$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^2 + y^2}\, d\tau$$

Die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe

Auf der Kreisscheibe

$$B_a\big((0,0)\big) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$$

mit $a > 0$ lösen wir das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & x^2 + y^2 \leqslant a^2 \\ u(x,y) = f(x,y)\,, & x^2 + y^2 = a^2\,. \end{cases}$$

Die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe: Polarkoordinaten

Wir führen Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos(\theta)\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin(\theta)\,, \quad \theta = \arctan(\tfrac{y}{x})\,.$$

Mit

$$v(r,\theta) := u\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$$

und

$$\tilde{f}(\theta) = f\big(a\cos(\theta), a\sin(\theta)\big)$$

wird unser Problem

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0\,, & 0 < r < a,\ 0 < \theta < 2\pi \\ v(a,\theta) = \tilde{f}(\theta)\,, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,. \end{cases}$$

Es ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ der Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

Die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe: Separation

Der Produktansatz

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

mit $R \in C^2\big((0, a)\big) \cap C\big([0, a]\big)$ und $\Theta \in C^2(\mathbb{R})$, 2π-periodisch wird in die PDE eingesetzt. Dann ergibt sich durch Trennung der Variablen

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda\,.$$

Für jedes $n \geqslant 0$ finden wir die Basislösungen

$$v_n(r, \theta) = r^n\big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\big)$$

und erfüllen die Randbedingung durch Superposition der v_n.

Die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe: Poisson-Kern

Das Resultat ist

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta') P\left(\frac{r}{a}, \theta - \theta'\right) \, d\theta' \, ,$$

wobei für alle q, t:

$$P(q,t) = \frac{1-q^2}{1-2q\cos(t)+q^2}$$

der Poisson-Kern ist.

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck

Wir betrachten das Rechteck vom Typ

$$R = [0, a] \times [0, b]$$

und lösen das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}$

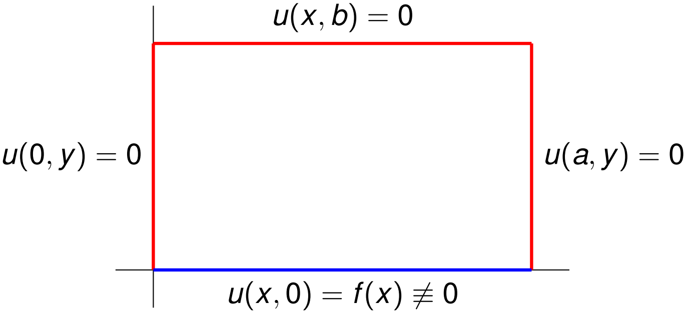
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & \text{in } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, y) = f(x, y)\,, & \text{auf } \partial R\,. \end{cases}$$

Wir nehmen zuerst an, dass f auf allen bis auf einer Kante verschwindet.
Den allgemeinen Fall erhält man durch Superposition der Lösungen.

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck

Es sei $f \equiv 0$ auf den Kanten $\{0\} \times [0,b]$, $\{a\} \times [0,b]$ und $[0,a] \times \{b\}$.

Es ist $f \not\equiv 0$ auf der Kante $[0,a] \times \{0\}$ und $f(0,0) = f(a,0) = 0$.



Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition der Lösungen für die einzelnen Kanten.

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck: Kante 1

Separation der Variablen: Der Produktansatz

$$u(x,y) = U(x)V(y)$$

in die Differentialgleichung eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} U''(x) - \lambda U(x) &= 0 \\ V''(y) + \lambda V(y) &= 0 \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen erhält man Lösungen der Form

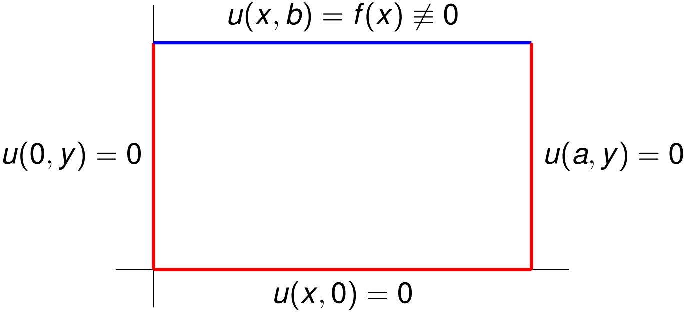
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

Mit $u(x,0) = f(x)$ erhalten wir

$$c_n = \frac{-2}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \,.$$

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck: Kante 2

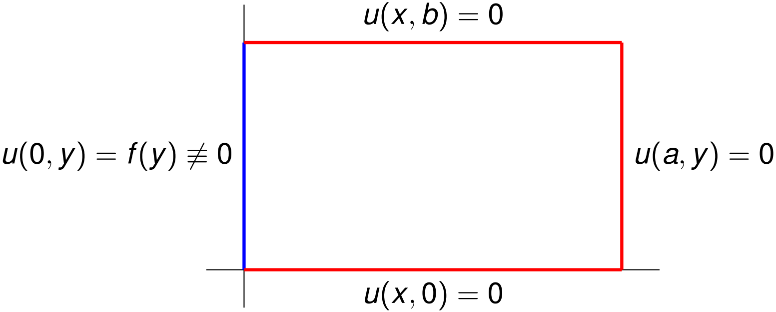
Es ist $f \not\equiv 0$ auf der Kante $[0, a] \times \{b\}$ und $f(0, b) = f(a, b) = 0$.



$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \,.$$

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck: Kante 3

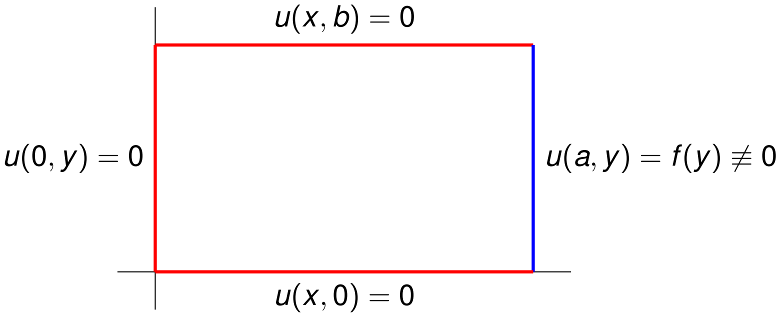
Es ist $f \not\equiv 0$ auf der Kante $\{0\} \times [0, b]$ und $f(0,0) = f(0,b) = 0$.



$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{-2}{b \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy \,.$$

Die Laplace-Gleichung auf einem Rechteck: Kante 4

Es ist $f \not\equiv 0$ auf der Kante $\{a\} \times [0, b]$ und $f(a, 0) = f(a, b) = 0$.



$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy \,.$$