Mathematik III
Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

20. Dezember 2018

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Das Mittelwertprinzip

Ist u harmonisch ($\Delta u = 0$) in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so ist der Wert $u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, gleich dem Mittelwert von u auf dem Rand der Kreisscheibe in Ω mit Mittelpunkt in (x, y):

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B((x,y),a)} u(x', y') d\sigma \, .$$

Dies ist analog auch gültig in Dimensionen $n \geqslant 3$.

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Das Maximum- und Minimumprinzip

Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ harmonisch ($\Delta u = 0$) in einer offenen beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so ist

$$\max\{u(x,y) \mid (x,y) \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(x,y) \mid (x,y) \in \partial\Omega\}$$

und

$$\min\{u(x,y) \mid (x,y) \in \overline{\Omega}\} = \min\{u(x,y) \mid (x,y) \in \partial\Omega\}\,.$$

Das heisst, dass das Maximum oder Minimum auf dem Rand angenommen wird.