Mathematik III

Die Methode von Duhamel

Cornelia Busch

D-CHAB

20. Dezember 2018

Die Methode von Duhamel

Warum ist die Lösung u des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ u(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\, dy \right) ds\,, \quad x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$$

?

d’Alembert ...

Wir wissen, dass die Lösung von

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ w(x,0) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) = F(x,s)\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

nach der Formel von d’Alembert durch

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F(\xi, s)\, d\xi$$

gegeben ist.

. . . zeitverschoben

Dann ist

$$v(x,t) := w(x,t-s) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi,s)\,d\xi =: U(x,t;s)$$

für $t \geqslant s \geqslant 0$ eine Lösung von

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R},\ t > s \\ v(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x,s) = F(x,s)\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Wir setzen

$$U(x,t;s) := w(x,t-s)\,.$$

Integration über s

Eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,s) = 0\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) := \int_0^t U(x,t;s)\,ds\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t \geqslant 0\,.$$

Beweis

Es ist

$$U(x,t;s) := \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,dy\,.$$

Ist $F(x,t)$ zweimal stetig differenzierbar, so ist auch $(x,t,s) \mapsto U(x,t,s)$ zweimal stetig differenzierbar. Man findet

$$u_t(x,t) = U(x,t;t) + \int_0^t U_t(x,t;s)\,ds = \int_0^t U_t(x,t;s)\,ds$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= U_t(x,t;s)_{s=t} + \int_0^t U_{tt}(x,t;s)\,ds \\ &= F(x,t) + \int_0^t c^2 U_{xx}(x,t;s)\,ds \\ &= F(x,t) + c^2 u_{xx}(x,t)\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$u(x,0) = \int_0^0 U(x,0;s)\,ds = 0$$

und

$$u_t(x,0) = \int_0^0 U_t(x,0;s)\,ds = 0$$

sind auch die Anfangsbedingungen erfüllt.

Ableitung des Integrals

Für $g(t) = \int_0^t f(t,s)\,ds$ mit stetig differenzierbarem f gilt

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} f(t+h,s)\,ds - \int_0^t f(t,s)\,ds \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t+h,s)\,ds + \int_0^t \frac{f(t+h,s) - f(t,s)}{h}\,ds \right) \\
&= f(t,t) + \int_0^t f_t(t,s)\,ds\,.
\end{aligned}
$$