Mathematik III

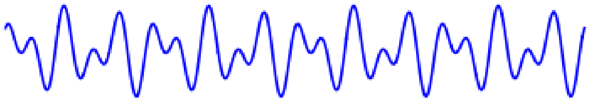
Die Fourier-Transformation in Bildern

Cornelia Busch

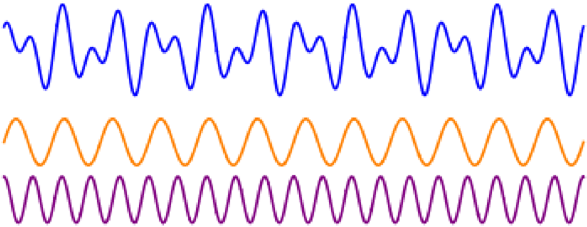
D-CHAB

20. Dezember 2018

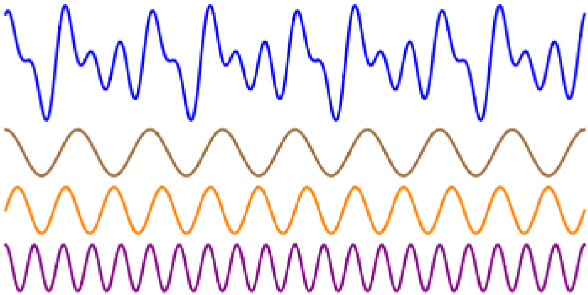
Eine periodische Funktion $f(t)$ ...



... wird zerlegt: $f(t) = \sin(3t) + \cos(5t)$.



$$f(t) = \cos(2t) + \sin(3t) + \cos(5t)$$



Theorie der Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Eine auf $\mathbb{R}$ definierte, periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Periode $T = 2\pi$ besitzt die Fourier-Reihe

$$f(t) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right), \quad \text{wobei}$$

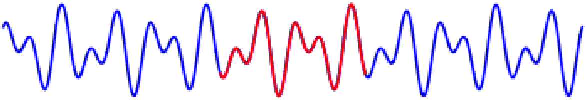
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

oder

$$f(t) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Fourier-Koeffizienten

Es sei eine 2π-periodische, reelle Funktion

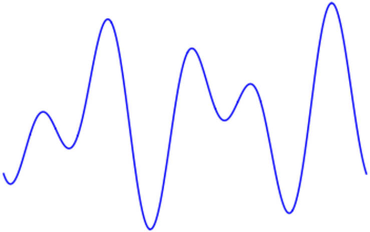
$f(t) =$ 

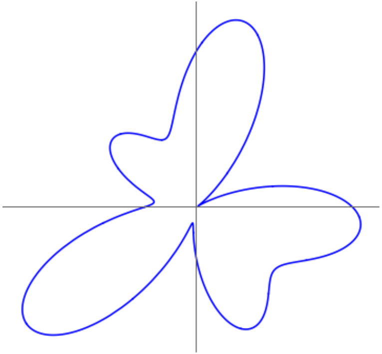
gegeben.

Was ist $\quad f(t)e^{-it} \quad$?

Fourier-Koeffizienten

Was ist $f(t)e^{-it}$?



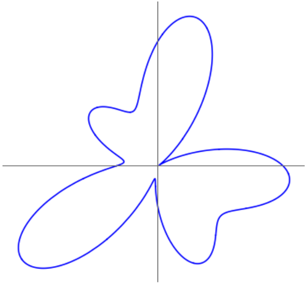


$$f(t)e^{-it} = f(t)\cos(t) - i\,f(t)\sin(t)\,.$$

Fourier-Koeffizienten

Was ist $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-it}\,dt \quad ?$$

$f(t)e^{-it}$:

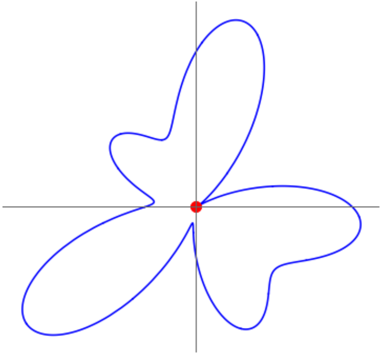


Fourier-Koeffizienten

Es ist

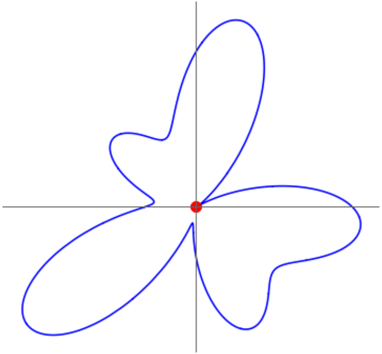
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-it}\,dt$$

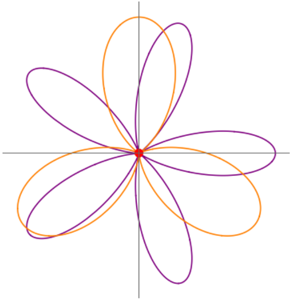
der Schwerpunkt der Kurve.



Fourier-Koeffizienten

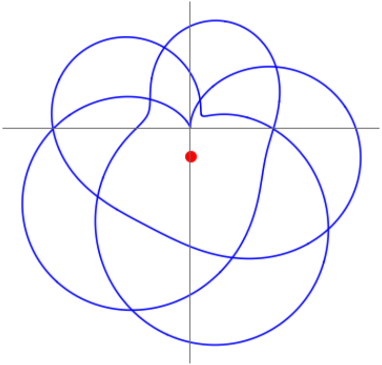
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(3t)+\cos(5t)\big)e^{-it}\,dt$$

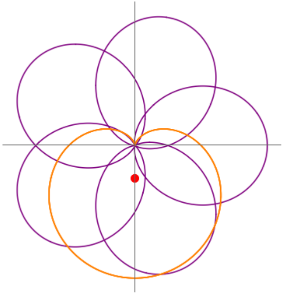




Fourier-Koeffizienten

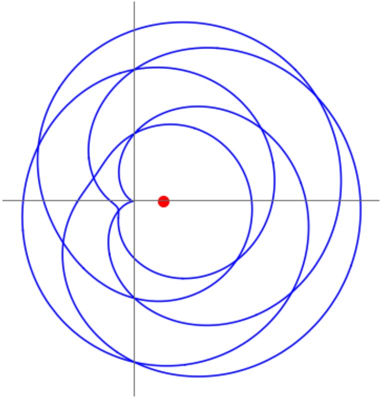
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i3t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(3t)+\cos(5t)\right)e^{-i3t}\,dt = -\frac{1}{2}i$$

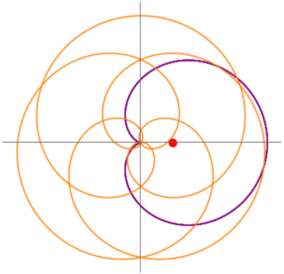




Fourier-Koeffizienten

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\,5t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(3t)+\cos(5t)\big)e^{-i\,5t}\,dt = \frac{1}{2}$$





Beispiel

Was ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(3t)+\cos(5t)\big)\,e^{-ikt}\,dt$$

für $k \in \mathbb{N}$?

Hinweis:
Wir verwenden die Orthogonalitätsrelationen trigonometrischer Funktionen.

Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(nt)\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(nt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = k = 0 \\ \pi & \text{falls } n = k \neq 0 \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(nt)\,dt = 0$$

Lösung für $k \geqslant 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t)+\cos(5t))\,e^{-ikt}\,dt = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,i & \text{falls } k=3 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } k=5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t)+\cos(5t))\,(\cos(kt)-i\sin(kt))\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\cos(kt)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(5t)\cos(kt)\,dt}_{\begin{cases}\pi & \text{falls } k=5\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}\Big)$$

$$-\frac{i}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t)\sin(kt))\,dt}_{\begin{cases}\pi & \text{falls } k=3\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(5t)\sin(kt))\,dt}_{0}\Big)$$

Für $k < 0$

Im Fall $k < 0$ erhält man analog

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t)+\cos(5t))\,e^{-ikt}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\,i & \text{falls } k=-3 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } k=-5 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\,, \quad \text{wobei} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\,.$$

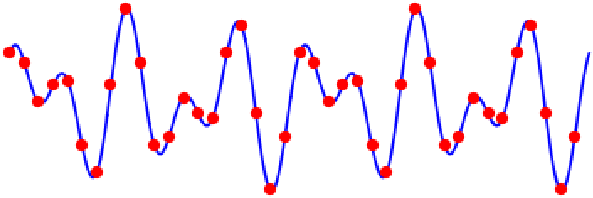
Also ist in unserem Fall

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{i}{2}\left(e^{i3t} - e^{-i3t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{i5t} + e^{-i5t}\right) \\ &= \sin(3t) + \cos(5t)\,. \end{aligned}$$

Praxis?

Problem:

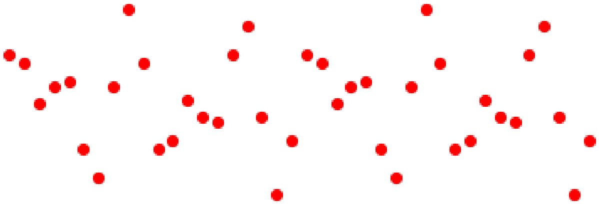
In der Praxis wird nur mit einzelnen Funktionswerten gearbeitet.



Praxis?

Problem:

In der Praxis wird nur mit einzelnen Funktionswerten gearbeitet.



Lösung:

Die diskrete Fourier-Transformation.

DFT und die Inverse

Von einer 2π-periodischen Funktion sind N Werte $f(t_\ell)$, $t_\ell := \ell \frac{2\pi}{N}$, $\ell = 0, \ldots, N-1$, bekannt. Dann ist

$$\widetilde{c}_k := \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(t_\ell) e^{-i\,k\,t_\ell}$$

die diskrete Fourier-Transformation.

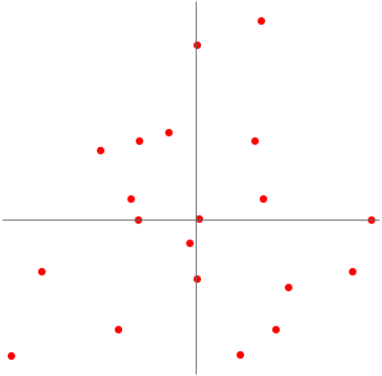
Ihre Inverse ist

$$f(t_\ell) = \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{c}_k e^{i\,k\,t_\ell} .$$

DFT

Es ist

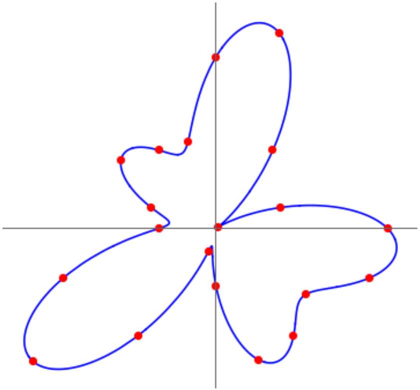
$$\left\{ f(t_\ell)e^{-i\,t_\ell} \,\middle|\, \ell = 1, \ldots, N \right\}$$



DFT

Es ist

$$\left\{ f(t_\ell) e^{-i\,t_\ell} \,\middle|\, \ell = 1, \ldots, N \right\}$$

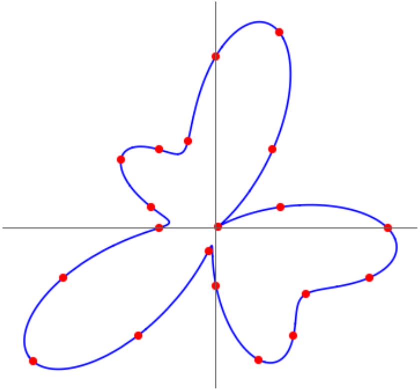


DFT

Also ist

$$\widetilde{c}_k := \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_\ell) e^{-i\,k\,t_\ell}$$

der Schwerpunkt der roten Punkte.



Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte einer Funktion f ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[\,f\,](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \;= \widehat{f}(\omega)\,,$$

$\omega \in \mathbb{R}$, und ihre Inverse ist

$$\mathcal{F}^{-1}[\,\widehat{f}\,](t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \;= f(t)\,.$$

Die Fourier-Transformation: Spektralfunktion

Bei der Fourier-Transformierten eines Zeitsignals f

$$\mathcal{F}[\,f\,](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \;= \widehat{f}(\omega)\,,$$

spricht man auch von der Spektralfunktion.
Es wird hier für festes ω nach t integriert. Das Resultat ist eine Funktion von ω.

Abfragen

Die Funktion

$$e_\omega : t \longmapsto e^{i\omega t}$$

kann man sich als „Abfragemuster“ vorstellen. Schwingt das Zeitsignal f auf einem grossen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit ähnlicher Frequenz wie dieses Muster?

In t-Bereichen, wo f wesentlich schneller schwingt, als e_ω, ist e_ω praktisch konstant im Vergleich zu f. Da die alternierenden Buckel von f sich somit fortlaufend herausheben, gibt es kaum einen Beitrag an das Integral.

Analog mit vertauschten Rollen, wenn f wesentlich langsamer schwingt als e_ω.

Abfragen

Schwingt f im Intervall I ungefähr mit der Frequenz ω:

$$f(t) \stackrel{!}{=} Ce^{i\omega t}\,, \qquad (t \in I)\,,$$

so hat das Produkt $f(t)e^{-i\omega t}$ längs I ein mehr oder weniger konstantes Argument und bei der Integration hebt sich kaum etwas heraus.

Dann fällt $|\widehat{f}(\omega)|$ gross aus.

Interpretation

Der Betrag

$$|\widehat{f}(\omega)|$$

gibt an, mit welcher „Gesamtenergie“ die Frequenz ω im Zeitsignal f vertreten ist.

Zu welchem Zeitpunkt die „Note“ ω gespielt wurde, kann man nicht unmittelbar dem Wert $\widehat{f}(\omega)$ entnehmen. Diese Information ist aber in der Funktion $\widehat{f}$ enthalten.

Die Fourier-Transformation betrachtet das gesamte Zeitsignal:
In jedem Wert $\widehat{f}(\omega)$ ist Information über f aus dem ganzen Bereich $-\infty < t < \infty$ enthalten.

In der Praxis

Viele in der Praxis vorkommenden Signale sind ausserhalb eine endlichen t-Intervalls identisch 0.

Die Fourier-Transformation kümmert das wenig:

Sie betrachtet auch solch ein Signal als Musik, die von $t = -\infty$ nach $t = +\infty$ läuft.

Fröhliche Weihnachten

und ein

gutes Neues Jahr !