Mathematik III
Partielle Differentialgleichungen

Cornelia Busch

D-CHAB

22. November 2018

Was haben wir in der Vorlesung behandelt?

- Einführung in PDEs
  - Beispiele von Differentialgleichungen
  - Eindeutigkeit von Lösungen: Die Rand- und Anfangsbedingungen
- Periodische Funktionen: Die Fourier-Reihe
  - Allgemeine Lösung: Separation der Variablen
  - Erfüllen der Randbedingungen: Superposition von Lösungen
  - Erfüllen der Anfangsbedingungen: die Fourier-Reihe
- Nicht-periodische Funktionen: Die Fourier-Transformation
  - Erstelle Gleichung für die Fourier-Transformierte der Unbekannten
  - Löse die Gleichung für $\widehat{u}$
  - Fourier-Rücktransformation liefert die Lösung u.

Was kommt noch?

- Stationäre Probleme: Die Laplace-Gleichung
- Die Laplace-Transformation

Einführung in PDEs : Klassifikation

- Ordnung der Differentialgleichung
- linear / nicht linear
- homogen / inhomogen
- Klassifikation linearer homogener PDEs zweiter Ordnung

hyperbolisch	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	Wellengleichung
parabolisch	$u_t - c^2 u_{xx} = 0$	Wärmeleitungsgleichung
elliptisch	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Laplace-Gleichung

Einführung in PDEs : Eindeutigkeit der Lösung

Die Eindeutigkeit der Lösung der PDE erhält man durch die Vorgabe zusätzlicher Bedingungen.

IC	Anfangsbedingungen	Zustand zur Zeit t_0
BC	Randbedingungen	Zustand am Rand des Gebiets

Einführung in PDEs : Anfangsbedingungen

Der Zustand zu einer gegebenen Zeit t_0 ist bekannt.

Wärmeleitungsgleichung: $u(x, t_0) = f(x)$

Wellengleichung: $u(x, t_0) = f(x)$,

$u_t(x, t_0) = g(x)$

Hier sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben.

Einführung in PDEs : Randbedingungen

Es sei D das Gebiet, in dem die PDE gilt.

Die Funktion ist auf dem Rand ∂D des Gebiets bekannt.

Dirichlet Bedingungen	u ist auf dem Rand spezifiziert
Neumann Bedingungen	die normale Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ ist spezifiziert.
Robin Bedingungen	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u$ ist spezifiziert. Es ist α eine gegebene Funktion.

In eindimensionalen Problemen ist D ein Intervall $0 < x < L$

und der Rand ist $x = 0$ und $x = L$.

$$u(0, t) = g(t) \text{ und } u(L, t) = h(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = g(t) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial n}(L, t) = h(t)$$

Eindimensionale Probleme I

Wärmeleitungsgleichung Temperaturverteilung in einem Stab

- Anfängliche Temperaturverteilung bekannt.
- Temperatur an den Enden bekannt

Wellengleichung Schwingungen einer Saite

- anfängliche Auslenkung der Saite bekannt
- anfängliche Geschwindigkeit bekannt
- Position der Enden gegeben.

Eindimensionale Probleme II

Unterscheide: Stab / Saite

endliche Länge L — $u(x,t)$ auf dem Intervall der Länge L studiert

- periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$
- Theorie der Fourier-Reihen

unendlich lang — $u(x,t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ studiert

- auf ganz $\mathbb{R}$ definierte nicht-periodische Funktion
- Theorie der Fourier-Transformation

Wellengleichung: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

	endliche Saite	unendliche Saite
PDE	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \ \ x \in [0, L], \, t > 0$	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, \, t > 0$
IC	$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$	$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
BC	$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ für alle t	
	Fourier-Reihe von $f(x)$ und $g(x)$	Fourier-Transformierte von $f(x)$ und $g(x)$

Wärmeleitungsgleichung: $u_t - c^2 u_{xx} = 0$

	endlicher Stab	unendlicher Stab
PDE	$u_t - c^2 u_{xx} = 0, \;\; x \in [0, L], \, t > 0$	$u_t - c^2 u_{xx} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \, t > 0$
IC	$u(x, 0) = f(x) \, , \;\; f : [0, L] \to \mathbb{R}$	$u(x, 0) = f(x) \, , \;\; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
BC	$\begin{cases} u(0, t) = U_0 \\ u(L, t) = U_L \end{cases}$ für alle t	
	Fourier-Reihe von $f(x)$	Fourier-Transformierte von $f(x)$

Probleme auf $[0, L]$

Separation der Variablen

- Schritt 1: Produktansatz für die Lösung der PDE

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$\rightsquigarrow$ ODE für $X(x)$ und $T(t)$.

- Schritt 2: Löse die ODEs, so dass das Produkt XT die Randbedingungen BC erfüllt. Dies sind die Basislösungen.

- Schritt 3: Erfülle die Anfangsbedingungen IC durch Superposition der Basislösungen. Theorie der Fourier-Reihen.

Probleme auf $\mathbb{R}$

- Schritt 1: Leite ein Anfangswertproblem für die Fourier-Transformierte $\widehat{u}$ von u bezüglich x her. $\rightsquigarrow$ ODE für $\widehat{u}$
- Schritt 2: Löse das Anfangswertproblem für $\widehat{u}$.
- Schritt 3: Bestimme die inverse Fourier-Transformierte u von $\widehat{u}$

Zukunft: Stationäre Probleme

- Die Laplace-Gleichung (oder Potentialgleichung) ist zeitunabhängig.