Zusammenfassung

Grundlagen der Mathematik I (Analysis A und B)

Laura Keller

Die Kapitel 1 - 9 gehören zu Analysis A, die Abschnitte ab Kapitel 10 zu Analysis B. Entsprechend beziehen sich die Hinweise auf Aufgaben entweder auf Serien aus dem ersten oder aus dem zweiten Semester.

Inhaltsverzeichnis

1 Logik, Mengen und Zahlen

1.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine (mathematische) Aussage?
- Welche Verknüpfungen von Aussagen kennen Sie? Beschreiben Sie diese in Worten und in Formeln!
- Kann man Verknüpfungen von Aussagen darstellen? Falls ja, wie?
- Welche Quantoren kennen Sie? ✍
  $\rightarrow$ Serie 1, Aufgabe 2
- Was ist eine Menge und wie kann man eine solche beschreiben?
- Welches sind die grundlegenden Operationen, die mit Mengen ausgeführt werden können?
- Welche gebräuchlichen Zahlmengen haben wir gesehen?
- Was ist ein Intervall? Geben Sie Beispiele an?
- Welche Kenngrössen für Teilmengen der reellen Zahlen kennen Sie?

1.2 Tatsachen und Regeln

Satz 1.1. *Es gelten die folgenden Regeln*

$$\neg(\forall x\ A(x)) \Leftrightarrow \exists x\ \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x\ A(x)) \Leftrightarrow \forall x\ \neg A(x)$$

sowie

$$\forall x\ (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x\ A(x)) \wedge (\forall x\ B(x))$$
$$\exists x\ (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x\ A(x)) \vee (\exists x\ B(x))$$

1.3 Ein paar kleine, interessante Ergänzungen (nicht im Unterricht besprochen und nicht prüfungsrelevant)

Als kleine Ergänzung zur Vorlesung folgen hier noch zwei interessante Fakten:

Satz 1.2. *Maximum und Minimum, respektive Infimum und Supremum sind eindeutig bestimmte Grössen.*

Sowie:

Satz 1.3. *Es gelten die folgenden Tatsachen*

- *Jede nicht leere, nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein eindeutiges Infimum I.*
  Und dieses kann wie folgt charakterisiert werden

$$(\forall x \in M : \quad x \geq I) \land (\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M : \quad x < I + \varepsilon)$$

- *Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein eindeutiges Supremum S.*
  Und dieses kann wie folgt charakterisiert werden

$$(\forall x \in M : \quad x \leq S) \land (\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M : \quad x > S - \varepsilon)$$

2 Komplexe Zahlen

2.1 Repetitionsfragen

- Was ist die komplexe/imaginäre Einheit?
- Was sind komplexe Zahlen?
- Was ist der Realteil, respektive der Imaginärteil?
- Welche Schreibweisen für komplexe Zahlen kennen Sie?
- Wie können komplexe Zahlen graphisch dargestellt werden?
- Welche Rechenregeln kennen Sie für die komplexen Zahlen? ✍
  → Serie 2, Aufgabe 3
- Wie ist der Betrag einer komplexem Zahl bestimmt und was bedeutet er geometrisch?
- Was ist die Eulersche Formel?
- Wie rechnet man von der Polarform in die Normalform um und umgekehrt?
- Welche Regeln gelten, wenn man mit komplexen Zahlen in Polarform rechnet und wie kann man sich das geometrisch veranschaulichen?
- Gibt es eine bestimmte Formel, mit deren Hilfe einfach Wurzeln aus komplexen Zahlen berechnet werden können?
- Was besagt der Fundamentalsatz der Algebra?
- Was gilt für ein Polynom mit lauter reellen Koeffizienten in Bezug auf seine Nullstellen?
- Kennen Sie ein Verfahren, das bei der Bestimmung von Nullstellen von Polynomen nützlich sein kann? ✍
  → Serie 3, Aufgabe 3

2.2 Tatsachen und Regeln

Für den **Betrag** von komplexen Zahlen gelten die folgenden Regeln

i) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

ii) $|z \cdot w| = |z||w|$

Für die **komplex konjugierte Zahl** gelten die folgenden Regeln

i) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

ii) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

ii) $\overline{\overline{z}} = z$

iii) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$

iv) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$

v) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$

vi) $z = \overline{z}$, falls $z \in \mathbb{R}$

vii) $\overline{z} = -z$, falls z rein imaginär

Aus der **Eulerschen Formel**

$$\mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

folgt

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Für die **Exponentialfunktion** gilt

i) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w, \quad z, w \in \mathbb{C}$

ii) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a(\cos(b) + i\sin(b))$

iii) $\mathrm{e}^{z+i2\pi} = \mathrm{e}^z$, allgemeiner gilt $\mathrm{e}^{z+ik2\pi} = \mathrm{e}^z \; \forall k \in \mathbb{Z}$

Zur **Umrechnung** zwischen Normal- und Polarform sind die folgenden Regeln zu beachten

Polar- in Normalform	Normal- in Polarform
$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$	$z = x + iy$
$z = x + iy$	$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$
$x = r\cos(\varphi)$ $y = r\sin(\varphi)$	$r = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$ $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ falls $x < 0$ und $y \geq 0$ $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) - \pi$ falls $x < 0$ und $y < 0$

Achtung: Bei der Umrechnung von Normal- in Polarform ist der Fall $x = y = 0$ ausgeschlossen. Falls $x = 0$ und $y \neq 0$, verwenden wir die Konvention

$$arg(iy) = \begin{cases} \pi/2, & y > 0 \\ -\pi/2, & y < 0 \end{cases}$$

Zur Berechnung von **Potenzen** in Polarform benutzt man die Regeln

i) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

ii) $z_1/z_2 = r_1 e^{i\varphi_1}/r_2 e^{i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

iii) $z^n = r^n e^{ni\varphi}$

Wurzeln aus komplexen Zahlen, d.h. die Lšungen der Gleichung $z^n = re^{i\varphi}$ sind gegeben durch

$$z_k = r^{1/n} e^{i(\varphi/n + k2\pi/n)}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die Lösungen einer **quadratischen Gleichung** $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ sind bestimmt durch die Formel

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Theorem 2.1 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

kann in n Linearfaktoren faktorisiert werden, d.h. geschrieben werden als

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1})(z - z_n).$$

Die Zahlen z_k sind also gerade die Nullstellen von $p(z)$ (mit Vielfachheit).

Zudem gilt

Satz 2.2. *Die nicht-reellen Nullstellen eines Polynoms mit lauter* ***reellen*** *Koeffizienten treten in komplex konjugierten Paaren auf.*

3 Folgen

3.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine Folge? Wie kann eine solche Folge beschrieben werden?
- Wann nennen wir eine Folge konvergent, und was ist der Grenzwert einer Folge? ✍
  $\rightarrow$ Serie 4, Aufgaben 1 und 2
- Kennen Sie besondere Folgen und deren Kovergenzverhalten?
- Wann nennt man eine Folge beschränkt?
- Welche Monotonie-Begriffe kennen Sie?
- Kennen Sie ein Anwendungsbeipiel für Folgen?

3.2 Tatsachen und Regeln

Zur Berechnung von Grenzwerten von Folgen gelten die folgenden **Rechenregeln**:
Wir nehmen an, es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = K$, $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ und C sei eine beliebige feste Zahl. Dann gilt:

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = K + L$

ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = K - L$

iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = K \cdot L$

iv) $\lim_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot K$

v) Falls $L \neq 0$ und $b_n \neq 0$, haben wir $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = K/L$

Betrachten wir ganz spezielle Folgen haben wir die folgenden Tatsachen:

i) Die Folge $a_n = x^n$ konvergiert für x mit $|x| < 1$ gegen null und divergiert für x mit $|x| > 1$.

ii) Die Folge $a_n = n^{-p}$ konvergiert für $p > 0$ gegen null und divergiert für $p < 0$.

Ein Werkzeug zum Studium von Folgen liefert das Sandwich-Theorem

Theorem 3.1 (Sandwich-Theorem)**.** *Es seien zwei konvergente Folgen mit gleichem Grenzwert gegeben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

sowie eine dritte Folge (b_n) *mit der Eigenschaft, dass für eine* $N_0 \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq N_0$$

dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Gelten für eine betrachtet Folge einige Zusatzeigenschaften, kann das folgende Ergebnis hilfreich sein, wenn es darum geht, über Konvergenz oder Divergenz einer Folge zu entscheiden:

Satz 3.2. *Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.*

Zum Schluss hier noch einige gebräuchliche **Grenzwerte**.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1,\ x > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \ \forall x$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

4 Reihen

4.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine Reihe?
- Welche speziellen Reihen kennen Sie? Gibt es dafür jeweils spezielle Rechenregeln?
  $\rightarrow$ Serie 5, Aufgabe 3
- Erklären Sie, was wir unter Konvergenz einer Reihe verstehen!
- Was sind Potenzreihen? Welche Bedeutung haben die darin vorkommenden Grössen?
- Was wissen Sie über die Konvergenz einer Potenzreihe?
- Was ist der Konvergenzradius, respektive das Konvergenzintervall?

4.2 Tatsachen und Regeln

Falls eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergiert**, muss zwingend gelten (notwendige Bedingung)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Um die Frage nach der Konvergenz einer Reihe zu beantworten, stehen uns verschiedene **Kriterien** zur Verfügung:
$\rightarrow$ Serie 5, Aufgaben 1 und 2 ✍

Das **Quotientenkriterium** für Reihen besagt Folgendes:
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls ein $q < 1$ exisitiert, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

Ein weitere Hilfsmittel, um Reihen auf Konvergenz zu untersuchen ist das **Vergleichskriterium**:
Wir betrachten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit nicht-negativen Gliedern, und für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gelte

$$c_n \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \geq N$$

Dann gilt

- Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (Majorantenkriterium).
- Falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (Minorantenkriterium).

Uns schliesslich das **Wurzelkriterium**:
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls ein $\rho < 1$ exisitiert, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \leq \rho < 1$$

Für beliebige Reihen gelten die folgenden **Rechenregeln**:

i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C \cdot a_n = C \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ganz speziell gelten für **geometrische Reihen**:

- Falls $q \neq 0$ und $q \neq 1$, so gilt

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

- Falls $|q| < 1$, gilt

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a\frac{1}{1-q}$$

Den Konvergenzradius einer Potenzreihe kann man mit Hilfe des **Quotientenkriteriums für Potenzreihen** berechnen:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

5 Funktionen

5.1 Repetitionsfragen

- Was verstehen wir unter einer Funktion?
- Erklären Sie die Begriffe Zielbereich, Wertebereich, Definitionsbereich, unabhängige und abhängige Variabel!
- Was ist ein konvexer, respektive ein konkaver Graph? Wie kann das Krümmungsverhalten einfach bestimmt werden?
- Geben Sie jeweils ein Beispiel einer injektiven, einer surjektiven und einer bijektiven Funktion. ✍
  $\rightarrow$ Serie 6, Aufgaben 3 und 4
- Wie unterscheiden sich strenge Monotonie und Monotonie?
- Wann nennen wir eine Funktion gerade, wann ungerade?
- Erklären Sie in einfachen Worten, was das Konzept eines Grenzwerts ist! Wie kann dieses Konzept in Formsprache gefasst werden?
- Welche unterschiedlichen Grenzwertbegriffe kennen Sie?
- Was macht eine stetige Funktion aus? Wie können wir dies formal beschreiben?
  Geben Sie Beispiele von stetigen und nicht stetigen Funktionen an! ✍
  $\rightarrow$ Serie 7, Aufgaben 1 und 2
- Was wissen Sie alles über elementare Funktionen (lineare Funktionen, Exponentialfunktionen, Polynome, trigonometrische Funktionen etc.)?

5.2 Tatsachen und Regeln

Für *streng monotone Funktionen* gilt die folgende Gesetzmässigkeit.
Satz 5.1. *Es gilt: Jede streng monotone Funktion ist injektiv.*

Für *Grenzwertüberlegungen* haben wir folgende Resultate und Rechenregeln gesehen.

Wir nehmen an, es gelte $\lim_{x\to c} f(x) = K$, $\lim_{x\to c} g(x) = L$ und A sei eine beliebige feste Zahl. Dann gilt:

i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = K + L$

ii) $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = K - L$

iii) $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = K \cdot L$

iv) $\lim_{x\to c}(A \cdot f(x)) = A \cdot K$

v) Falls $L \neq 0$, haben wir $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = K/L$

→ Serie 6, Aufgabe 5 ✍

Satz 5.2. *Der Grenzwert* $\lim_{x\to c} f(x)$ *existiert genau dann, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte* $\lim_{x\nearrow c} f(x)$ *und* $\lim_{x\searrow c} f(x)$ *existieren und gleich sind.*

Wichtige Eigenschaften *stetiger Funktionen*:

Wir gehen von zwei stetigen Funktionen $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus. Dann gilt:

i) $f + g$ ist stetig

ii) $f - g$ ist stetig

iii) $c \cdot f$, respektive $c \cdot g$, ist für jede beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ stetig

iv) $f \cdot g$ ist stetig

v) $\frac{f}{g}$ ist stetig, sofern $g \neq 0$

vi) Ausserdem ist die Verknüpfung stetiger Funktionen wiederum stetig.
Genauer: Es seien $f : I \subset \mathbb{R} \to image(f)$ und $g : image(f) \to image(g)$ zwei stetige Funktionen.
Dann ist die Verknüpfung
$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$
ebenfalls stetig und es gilt
$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c}(f(x))$$

vii) Für eine stetige Funktion f gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Eines der wichtigsten und auch anwendungsrelevanten Resultate für stetige Funktionen ist der folgende Satz

Satz 5.3 (Zwischenwertsatz)**.** *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.*
Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.
Respektive:
Es sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und es seinen $a, b \in I$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.
Dann hat f mindestens eine Nullstelle zwischen a und b.

Insbesondere im Hinblick auf Optimierungsprobleme, bei welches es darum geht, einen besten Wert einer Grösse zu bestimmen, ist das folgende Resultat hilfreich.

Satz 5.4. *Es sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und I sei abgeschlossen und beschränkt.*
Dann nimmt f sein Maximum und Minimum auf I an,
d.h. es gibt ein $x_{min} \in I$ und ein $x_{max} \in I$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in I \ : f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}).$$

Und zum Schluss noch ein Resultat zur Umkehrfunktion

Satz 5.5 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**.** *Es sei $f : I \to J$ eine stetige und bijektive Funktion. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ stetig.*

6 Differentialrechnung

6.1 Repetitionsfragen

- Was ist die Ableitung, respektive die Ableitungsfunktion, einer Funktion?
- Wie hängen die Begriffe Steigungsdreieck, Sekante, Tangente und Ableitung zusammen?
- Was für eine Beziehung besteht zwischen der mittleren und der momentanen Änderungsrate?
- Diskutieren Sie die Bedeutung der Ableitung! (geometrisch, praktisch, ...)
- Was ist Differenzierbarkeit?
- Was sind kritische Punkte? Wie findet man solche und was für eine Bedeutung haben sie?
- Was ist die zweite Ableitung? Was sind, allgemeiner, Ableitung höherer Ordnung?
- Was sind Wendepunkte? Wie findet man solche und was für eine Bedeutung haben sie?
- Was sind lokale Extrema und welche Typen gibt es? Wie findet man solche?
- Was sind globale Extrema und welche Typen gibt es? Wie findet man solche? Macht es einen Unterschied, ob wir globale Extrema auf einem offenen oder angeschlossenen Intervall suchen? Falls ja, welchen?
- Was ist ein Optimierungsproblem? Wie kann ein solches gelöst werden?
- Was ist die Tangentenapproximation?
- Was sind Differentiale und wo werden sie gebraucht? ✍
  → Serie 9, Aufgabe 4
- Was sind Taylorpolynome? Wie sind sie definiert? Kennen Sie eine weitere Schreibweise, die Tangentenapproximation anzugeben?
- Was ist die Taylorreihe einer Funktion f mit Entwicklungspunkt a?
- Welche "praktischen" Anwendungen der Differentialrechnung kennen Sie? ✍
  → Serie 9, Aufgabe 3

6.2 Tatsachen und Regeln

Wir beginnen mit einer kleinen Zusammenstellung der wichtigsten **Ableitungsregeln** Diese Liste können Sie beliebig ergänzen.

- $f(x) = mx + q \Rightarrow f'(x) = m$
- $f(x) = ax^p \Rightarrow f'(x) = a \cdot p \cdot x^{p-1}$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = ln(a) \cdot a^x, a > 0$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), c \in \mathbb{R}$
- $(f + h)'(x) = f'(x) + h'(x)$
- $(f - h)'(x) = f'(x) - h'(x)$
- Produktregel $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Kettenregel $(f(g))'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- Ableitung der Umkehrfunktion $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

→ Serie 7, Aufgabe 5 ✍

Satz 6.1. *Es gelten die beiden folgenden Tatsachen*

i) Falls eine Funktion f an der Stelle a nicht stetig ist, kann dort keine Ableitung existieren.

ii) Besitzt die Funktion f an der Stelle a eine Ableitung, ist f dort insbesondere stetig.

Satz 6.2 (Regel von Bernoulli-l'Hospital)**.** *Falls entweder* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *oder* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*, gilt*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

→ Serie 8, Aufgabe 1

Satz 6.3 (Mittelwertsatz)**.** *Wir betrachten eine Funktion* $[a,b] \ni x \mapsto y = f(x)$*, welche die Eigenschaften hat, dass*

i) f *ist stetig auf* $[a,b]$

ii) f *ist auf* (a,b) *differenzierbar*

Dann gibt es mindestens ein $z \in (a,b)$*, so dass gilt*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z).$$

→ Serie 8, Aufgabe 2

Für eine **Kurvendiskussion** sind die folgenden Tatsachen nützlich

- Ist $f' > 0$ auf einem Intervall, so ist die Funktion dort wachsend.
- Ist $f' < 0$ auf einem Intervall, so ist die Funktion dort fallend.
- Ist $f' = 0$ auf einem Intervall, so ist die Funktion dort konstant.
- Ist $f' = 0$ an einem isolierten Punkt, so kann die Funktion dort ein Maximum oder Minimum haben.
- Die kritischen Punkte, zusammen mit den Punkten, an welchen die Ableitung nicht definiert ist (z.B. Sprungstellen), unterteilen den Definitionsbereich in Intervalle, auf denen die Funktion entweder nur steigend oder nur fallend ist.
- Zwischen f und f' gelten die folgenden Beziehungen:
  - Falls f' auf einem Intervall zunehmend ist, so ist f dort konvex.
  - Falls f' auf einem Intervall abnehmend ist, so ist f dort konkav.
- Zwischen f und f'' gelten die folgenden Beziehungen:
  - Falls der Graph der Funktion f auf einem Intervall konvex ist (linksgekrümmt), so gilt dort $f'' \geq 0$.
  - Falls der Graph der Funktion f auf einem Intervall konkav ist (rechtsgekrümmt), so gilt dort $f'' \leq 0$.
- Mögliche Kandidaten für Wendepunkte findet man über die Bedingung $f'' = 0$.
- Wechselt f'' an der Stelle x das Vorzeichen, liegt an der Stelle x ein Wendepunkt vor.

- An einem Wendepunkt von f hat die Ableitung f' ein lokales Maximum oder Minimum.
- Test für lokales Minimum/Maximum via erste Ableitung:
  - Falls f' an der Stelle x vom Positiven ins Negative wechselt, hat f an dieser Stelle ein lokales Maximum.
  - Falls f' an der Stelle x vom Negativen ins Positive wechselt, hat f an dieser Stelle ein lokales Minimum.
- Test für lokales Minimum/Maximum via zweite Ableitung:
  - Falls $f''(x) < 0$, hat f an dieser Stelle ein lokales Maximum.
  - Falls $f''(x) > 0$, hat f an dieser Stelle ein lokales Minimum.
  - Falls $f''(x) = 0$, sagt dieses Kriterium nichts aus.

✍

→ Serie 8, Aufgabe 3

Theorem 6.4 (Satz von Taylor)**.** *Wir nehmen an, dass die betrachtete Funktion f auf dem offenen Intervall I (mit $x_0 \in I$) Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt. Dann gilt für jedes beliebige Argument $x \in I$*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{1}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \\ &= P_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

für ein c zwischen x_0 und x.

Hier ein paar wichtige **Taylorreihen**

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$
- Für $-1 < x < 1$ gilt: $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$
- Für $-1 < x < 1$ gilt: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$
- Für $-1 < x < 1$ gilt: $(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots$ (Binomialreihe)

Für das **Rechnen mit Potenzreihen, insbesondere mit Taylorreihen**, sind die folgenden Regeln wichtig

- Multiplikation von Reihen
  Wir betrachten zwei Potenzreihen
  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$
  wobei x im Konvergenzintervall beider Reihen ist.
  Dann gilt
  $$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) x^n.$$

- Termweises Ableiten
  Wir beginnen mit der Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe,
  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
  dabei ist wiederum x im Konvergenzintervall I.
  Dann ist f differenzierbar, und es gilt
  $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- Termweises Integrieren
  Wir beginnen mit der Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe,
  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
  dabei ist wiederum x im Konvergenzintervall I.
  Dann ist f auf dem Intervall $[a, b] \subset I$ integrierbar, und es gilt
  $$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx.$$

7 Differentialgleichungen Teil 1

7.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine Differentialgleichung?
- Erläutern Sie die Begriffe "abhängige Variable" und "unabhängige Variable".
- welche drei Eigenschaften haben wir verwendet, um Differentialgleichungen zu charakterisieren? Was bedeuten diese Eigenschaften?
- Was sind in einer Differentialgleichung die Koeffizienten? Welcher Spezialfall ist besonders wichtig?
- Was verstehen wir unter der Störfunktion?
- Was ist ein Randwertproblem?
- Nennen Sie ein Beispiel eines Anfangswertproblems!
- Kennen Sie Beispiele von Differentialgleichungen aus anderen Vorlesungen?

7.2 Tatsachen und Regeln

Differentialgleichungen werden sehr häufig zur Beschreibung eines technischen oder naturwissenschaftlichen Vorgangs eingesetzt.
Hier einige **wichtige Beispiele von Differentialgleichungen**:

- Newtonsches Auskühlungsgesetz ($\rightarrow$ siehe Einleitung der Vorlesung)

$$H'(t) = -k(H(t) - H_U)$$

  Welche Bedeutung hat die Konstante H_U?

- Exponentielles Wachstum ($k > 0$) respektive exponentieller Zerfall ($k < 0$)

$$f'(x) = kf(x)$$

- Logistisches Wachstum ($\rightarrow$ vergleiche auch Dokument auf Moodle)

$$\frac{dP}{dt} = kP\Big(1 - \frac{P}{L}\Big).$$

  Erläutern Sie die Bedeutung der Konstanten k und L!

Eine spezielle Klasse von Differentialgleichungen, welche wir exakt lösen können, sind die **linearen, homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**.
Eine solche lässt sich in der folgenden Form schreiben

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) \cdots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0 \tag{1}$$

Zum Lösen einer solchen Differentialgleichung betrachtet man zuerst das dazugehörige **charakteristische Polynom**, respektive die **charakteristische Gleichung**

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

respektive

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

und bestimmt dessen Nullstellen, respektive deren Lösungen.
Mit Hilfe dieser Informationen lassen sich die insgesamt n folgenden Lösungen ablesen:

- Für jede **reelle** Nullstelle, respektive Lösung, λ_s mit Vielfachheit m_s erhält man die m_s Lösungen

$$e^{\lambda_s x},\ xe^{\lambda_s x},\ \ldots,\ x^{m_s-1}e^{\lambda_s x}$$

- Für jedes **Paar zweier zueinander komplex konjugierter** Nullstellen, respektive Lösungen, $a_r + ib_r$ mit Vielfachheit m_r erhält man die $2m_r$ Lösungen

$$\begin{gathered} e^{a_r x}\cos(b_r x),\ e^{a_r x}\sin(b_r x),\ xe^{a_r x}\cos(b_r x),\ xe^{a_r x}\sin(b_r x),\ \ldots \\ \ldots\ x^{m_r-1}e^{a_r x}\cos(b_r x),\ x^{m_r-1}e^{a_r x}\sin(b_r x) \end{gathered}$$

Diese so erhaltenen n Lösungen nennt man die **Fundamentallösungen**.
$\rightarrow$ Serie 10, Aufgabe 3 ✍

Zusammen mit dem **Superpositionsprinzip**, welches besagt, dass mit zwei Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ von (1) die Linearkombination

$$w(x) = Au(x) + Bv(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

wieder eine Lösung von (1) ist, ergibt sich nun schlussendlich die **allgemeine Lösung** von (1)

$$\begin{aligned} u(x) \quad = \quad & \sum_{i=0}^{r} \Big(\sum_{p=0}^{m_i-1} C_{ip} x^p e^{\lambda_i x} \Big) \\ & + \sum_{j=0}^{s} \Big(\sum_{q=0}^{m_j-1} \big(A_{jq} x^q e^{a_j x} \sin(b_j x) + B_{jq} x^q e^{a_j x} \cos(b_j x) \Big) \end{aligned}$$

8 Integralrechnung

8.1 Repetitionsfragen

- Was ist das unbestimmte, respektive das bestimmte Integral?
- Erklären Sie die Unterschiede zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral und illustrieren Sie Ihre Antwort mit konkreten Beispielen!
- Was bedeutet der Begriff ”Stammfunktion”?
- Erläutern Sie die Begriffe ”Integration”, ”Integrand” und ”Integrationsgrenzen”.
- Was sind Riemannsummen?
- Welche graphische Bedeutung hat das bestimmte Integral?
- Wie ist der Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall definiert?
- Wie lautet der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung?
- Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral? ✍
  → Serie 12, Aufgabe 5

8.2 Tatsachen und Regeln

Für die **unbestimmte Integration** haben wir die folgenden Rechenregeln:

- $\int \underbrace{f'(x)}_{\uparrow} \cdot \underbrace{g(x)}_{\downarrow}\ dx = (f \cdot g)(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx$ (partielle Integration)
- $\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int \frac{df}{dy}\ dy = f(g(x)) + C$ (Substitution)
- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
- $\int sf(x)\, dx = s \int f(x)\, dx$ s eine Konstante
- $\int k\, dx = kx + C$
- $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int e^x\, dx = e^x + C$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x)\, dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$
- $\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$
- $\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$
- $\int \tan^2(x)\, dx = \tan(x) - x + C$
- $\int \sinh(x)\, dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)\, dx = \sinh(x) + C$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C$
- $\int \ln(|x|)\, dx = x(\ln(|x|) - 1) + C$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln(|\frac{x-a}{x+a}|) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin(\frac{x}{|a|}) + C$

→ Serie 11, Aufgabe 1 ✍
Diese Liste können Sie auch beliebig selbst erweitern.

Für das bestimmte Integral sind die folgenden Regeln und Abschätzungen zu beachten:

- $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$ (Umkehr der Untegrationsrichtung)
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

- $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
- $(b-a)\cdot\min\{f(x)|a\le x\le b\}\le\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)\cdot\max\{f(x)|a\le x\le b\}$
- $f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,\quad a\le c\le b$ (Aufteilung des Integrationsbereichs)
- g gerade, dann gilt $\int_{-a}^a g(x)\,dx=2\int_0^a g(x)\,dx$
- f ungerade, dann gilt $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$
- $\int_a^b \underbrace{f'(x)}_{\uparrow}\cdot\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\ dx=f\cdot g\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\ dx$ (partielle Integration)
- $\int_a^b f'(g(x))g'(x)\ dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f'(y)\ dy=f(g(b))-f(g(a))$ (Substitution)

$\rightarrow$ Serie 12, Aufgaben 1 und 2 ✍

Es gelten die folgenden Tatsachen:

Satz 8.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Falls der Integrand $f(x)$ auf dem betrachteten Intervall $[a,b]$ stetig ist, gilt für ein $c\in[a,b]$*

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Satz 8.2 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung)**.** *i) Falls der Integrand $f(x)$ auf dem betrachteten Intervall $[a,b]$ stetig ist, so ist die Funktion*

$$F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$$

differenzierbar auf $[a,b]$, also insbesondere stetig auf $[a,b]$, und es gilt

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy=f(x).$$

ii) Falls der Integrand $f(x)$ auf dem betrachteten Intervall $[a,b]$ stetig ist und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf $[a,b]$ ist, gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F\Big|_a^b$$

Bemerkung Der zweite Teil des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung kann auch wie folgt geschrieben werden

$$\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)=f\Big|_a^b$$

9 Differentialgleichungen Teil 2

9.1 Repetitionsfragen

- Welche Techniken kennen Sie zur Lösung von Differentialgleichungen? Beschreiben Sie diese jeweils mit einem Beispiel!
  → Serie 13, Aufgabe 1 ✍
- Was ist eine partikuläre Lösung?
- Was ist eine autonome Differentialgleichung?

9.2 Tatsachen und Regeln

Für lineare, inhomogene Differentialgleichungen gilt

Satz 9.1. *Ist $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung und $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung, so ist*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung.

Und hier folgt eine kleine Übersicht hilfreicher Ansätze für die partikuläre Lösung.

Rechte Seite der Diff.-gl. / Störfunktion	Ansatz für die partikuläre Lösung
Polynom $s(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$	$y(t) = C_0 + C_1 t + \cdots + C_n t^n$
Spezialfall: 0 ist eine **m**-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms	$y(t) = (C_0 + C_1 t + \cdots + C_n t^n)t^{\mathbf{m}}$
Exponentialfunktion $s(t) = Ae^{kt}$	$y(t) = Ce^{kt}$
Spezialfall: k ist eine **m**-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms	$y(t) = (Ce^{kt})t^{\mathbf{m}}$
Schwingung $s(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$	$y(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$
Spezialfall: $i\omega$ ist eine **m**-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms	$y(t) = (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))t^{\mathbf{m}}$

Die Techniken, die wir gesehen haben, werden durch das folgende theoretische Resultat "abgesichert"

Satz 9.2 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz von Picard-Lindelöf-Peano)). *i) Das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

besitzt für "vernünftige" Funktionen f eine eindeutige Lösung

$$x \mapsto y(x), \quad x \in I$$

wobei I von x_0 und y_0 abhängen kann.

ii) Das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = s(s)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = v_0, \cdots y^{(n-1)}(x_0) = z_0$$

besitzt für "vernünftige" Funktionen $f_{n-1}, \cdots f_1, f_0$ und s eine eindeutige Lösung

$$x \mapsto y(x), \quad x \in I$$

wobei I von x_0 und den gegebenen Anfangsdaten abhängen kann.

10 Funktionen in zwei und mehr Variablen

10.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine Funktion von zwei oder mehr Variablen? Geben Sie Beispiele an!
- Erläutern Sie die Begriffe Definitionsbereich, Wertebereich, unabhängige Variablen und abhängige Variable.
  → Serie 1, Aufgabe 1 ✍
- Was ist der Graph einer Funktion in zwei Variablen?
- Was sind Niveaulinien? Illustrieren Sie Ihre Antwort mit einem Beispiel!
- Was ist das kartesische (euklidische) Koordinatensystem?
- Was sind Polarkoordinaten?
- Kennen Sie spezielle Ebenen im Raum? Wie lassen sich diese beschreiben?

10.2 Tatsachen und Regeln

Eine wichtige Klasse von Funktionen in zwei Variablen sind die **linearen Funktionen**. Im Falle von zwei Argumenten sind diese Funktionen von der Form

$$z = f(x, y) = Ax + By + D \quad mit \quad A, B, D \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ Serie 1, Aufgabe 2

11 Differentialrechnung in zwei (und mehr Variablen)

11.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine lineare Funktion in zwei Variablen? Denken Sie insbesondere an Formel und Graph.
- Erklären Sie den Begriff des Grenzwerts (Limes) im zweidimensionalen Fall - anschaulich mit Hilfe einer Skizze und andererseits mit Hilfe von Formeln!
- Was ist eine stetige Funktion von zwei Variablen? Illustrieren Sie Ihre Antwort mit Beispielen!
- Welche Ableitungsbegriffe kennen Sie für eine Funktion in zwei (oder mehr) Variablen?
- Wie hängen die Begriffe "partielle Ableitung", "Gradient" und "Richtungsableitung" zusammen?
- Welche Informationen gibt Ihnen der Gradient?
- Was bedeuten die partielle Ableitung, respektive die Richtungsableitung geometrisch?
- Was sind höhere partielle Ableitungen? Wo kommen solche vor?
- Was ist die Tangentialebene, respektive die lokale Linearisierung und das totale Differential?
- Wann wird eine Funktion differenzierbar genannt?
- Was sind kritische Punkte? Was geben solche kritischen Punkte an?
- Was sind Sattelpunkte?
- Welche Szenarien von Extremalstellen kennen Sie? Illustrieren Sie Ihre Antwort mit je einem Beispiel!
- Was ist der Unterschied zwischen lokalen und globalen Extremalstellen?
- Wie gehen Sie vor, um globale Extremalstellen - allenfalls unter einer gegebenen Nebenbedingung - zu finden?

11.2 Tatsachen und Regeln

Zur **Berechnung von Grenzwerten** gelten die analogen Rechenregeln wie im eindimensionalen Fall.
Wir nehmen an, es gelte $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = K$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$ und A sei eine beliebige feste Zahl.
Dann gilt:

i) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y) + g(x,y)) = K + L$

ii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y) - g(x,y)) = K - L$

iii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y) \cdot g(x,y)) = K \cdot L$

iv) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(A \cdot f(x,y)) = A \cdot K$

v) Falls $L \neq 0$, haben wir $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)/g(x,y)) = K/L$

Die hier festgehaltenen Regeln gelten - mit den nötigen Anpassungen - auch im Fall von mehr Variablen.

Zur Berechnung von **partiellen Ableitungen** gelten die gleichen Regeln, die wir im eindimensionalen Fall bereits kennengelernt haben.
$\rightarrow$ Serie 2, Aufgabe 1

Was **zweite partielle Ableitungen** betrifft, gilt der

Satz 11.1 (Satz von Schwarz)**.** *Falls f_{xy} und f_{yx} in einem Punkt (a,b) im Inneren ihres Definitionsbereichs stetig sind, so gilt*

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Auch für Funktionen in zwei Variablen gibt es eine **Kettenregel**. Im höherdimensionalen Fall gibt es nun aber zwei "Varianten":

i) Wir betrachten eine zusammengesetzte Funktion der Form

$$z = f(x,y) = f(g(t), h(t)).$$

Dann gilt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ii) Wir betrachten eine zusammengesetzte Funktion der Form

$$z = f(x,y) = f(g(u,v), h(u,v)).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$\rightarrow$ Serie 3, Aufgabe 1

Die **Richtungsableitung** kann wie folgt berechnet werden:
Es sei f so, dass die ersten partiellen Ableitungen existieren, und $\vec{u} = \vec{e}_u = u_1\vec{e}_x + u_2\vec{e}_y$ sei ein Einheitsvektor.
Dann gilt

$$D_{\vec{u}}f(a,b) = grad\, f(a,b) \cdot \vec{e}_u = f_x(a,b)u_1 + f_y(a,b)u_2$$

→ Serie 4, Aufgabe 1 ✍

Die **Tangentialebene** ist an der Stelle (a, b) wie folgt gegeben

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

→ Serie 4, Aufgabe 2 ✍

Wie im eindimensionalen Fall kann eine Funktion durch ein Polynom **approximiert** werden. Dies ist gerade das Resultat des Satzes von Taylor.

Satz 11.2 (Satz von Taylor)**.** *Falls die betrachtete Funktion f und alle ihre partiellen Ableitungen auf einem offenen, rechteckigen Gebiet R um den Punkt (a, b) stetig sind, gilt für $(x, y) \in R$*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\\
&+ \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)\\
&\qquad +f_{yy}(a,b)(y-b)^2\Big)\\
&+ \frac{1}{3!}\Big(f_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3f_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b)\\
&\qquad +3f_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(a,b)(y-b)^3\Big)\\
&+ R_3(x,y)\\
&= P_3(x,y) + R_3(x,y)
\end{aligned}$$

Für das Restglied $R_3(x, y)$ gilt die Formel

$$\begin{aligned}
R_3(x,y) &= \frac{1}{4!}\Big(f_{xxxx}(a^*,b^*)(x-a)^4 + 4f_{xxxy}(a^*,b^*)(x-a)^3(y-b)\\
&\quad +6f_{xxyy}(a^*,b^*)(x-a)^2(y-b)^2\\
&\quad +4f_{xyyy}(a^*,b^*)(x-a)(y-b)^3 + f_{yyyy}(a^*,b^*)(y-b)^4\Big)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für ein $t \in [0, 1]$.

Die oben angegebene Form gibt im Konkreten die Approximation des 3. Grades für eine Funktion in zwei Variablen an.
Allgemeiner kann der Satz von Taylor wie folgt festgehalten werden

Satz 11.3 (Allgemeine Form des Satzes von Taylor)**.** *Es bezeichne $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Wiederum nehmen wir an, dass die betrachtete Funktion f und alle ihre partiellen Ableitungen auf einem offenen, rechteckigen Gebiet R um den Punkt x stetig sind. Dann gilt für $y \in R$*

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) \\ &+ \nabla f(x) \cdot (y - x) \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)(y_i - x_i)(y_j - x_j) \\ &+ \ldots \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(x_t)(y_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (y_{i_m} - x_{i_m}) \end{aligned}$$

mit

$$x_t = (1-t)x + tu$$

für ein $t \in [0, 1]$.

✍

→ Serie 5, Aufgabe 2

Kritische Punkte im $\mathbb{R}^2$ können mit Hilfe des untenstehenden Tests **charakterisiert** werden: Es sei (a, b) ein kritischer Punkt der Funktion f.
Dann betrachten wir die Diskriminante

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

Dann gilt:

- Ist $D(a, b) > 0$ und $f_{xx}(a, b) > 0$, liegt an der Stelle (a, b) ein lokales Minimum vor.
- Ist $D(a, b) > 0$ und $f_{xx}(a, b) < 0$, liegt an der Stelle (a, b) ein lokales Maximum vor.
- Ist $D(a, b) < 0$, liegt an der Stelle (a, b) ein Sattelpunkt vor.
- Ist $D(a, b) = 0$, können keine weiteren Aussagen gemacht werden.

✍

→ Serie 6, Aufgabe 1

Die **Methode der Lagrange-Multiplikatoren** besagt, dass Kandidaten für bedingte Extremalstellen der Funktion f durch Lösen des Gleichungssystems

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y) = c$$

gefunden werden können, wobei g die Nebenbedingung repräsentiert. ✍
$\rightarrow$ Serie 7, Aufgabe 1

Liegt eine Nebenbedingung der Form $g(x, y) \leq c$ vor, muss eine Fallunterscheidung gemacht werden:
Das Innere des betrachteten Gebiets ($g(x, y) < c$) wird wie die xy-Ebene behandelt, d.h. es werden die kritischen Punkte als Kandidaten bestimmt. Der Rand ($g(x, y) = c$) wird mit Hilfe der Lagrnage-Multiplikatoren behandelt.
Ist der Rand beispielsweise durch mehrere Kurvenstücke gegeben, muss die Methode der Lagrange-Multiplikatoren für jedes einzelne Kurvenstück separat durchgeführt werden.
$\rightarrow$ Serie 7, Aufgabe 5

12 Integralrechnung in zwei (und mehr Variablen)

12.1 Repetitionsfragen

- Was ist das bestimmte Integral im zweidimensionalen Fall, und wie ist es definiert?
- Erklären Sie die Begriffe Obersumme, Untersumme, Doppelintegral und iteriertes Integral!
- Was für Schreibweisen für Doppelintegrale kennen Sie?

12.2 Tatsachen und Regeln

Im Falle einer **Integration über ein Rechteck** $R = [a, b] \times [c, d]$ gilt

$$\begin{aligned} \int_R f\, dA &= \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\, dx \Big)\, dy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy \Big)\, dx \end{aligned}$$

Bei der **Integration über allgemeinere Gebiete** ist zu beachten, dass

- die Grenzen des äusseren Integrals nur Konstanten sein dürfen.
- die Grenzen des inneren Integrals von der Integrationsvariablen des äusseren Integrals abhängen dürfen.
- die Integrationsgrenzen angepasst werden müssen, wenn die Integrationsreihenfolge vertauscht wird (siehe Beispiel aus der Vorlesung).
  → Serie 9, Aufgabe 2

Zur Integration über allgemeinere Gebiete empfehle ich insbesondere auch Serie 8, Aufgabe1.

Für die Integration in **Polarkoordinaten** gilt
→ Serie 9, Aufgabe 3

$$dA = r\, dr\, d\varphi \quad \textit{respektive} \quad dA = r\, d\varphi\, dr$$

und für das allfällige Umschreiben des Integranden sind die folgenden Formeln zu berücksichtigen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \textit{und} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Selbstverständlich gelten die analogen Rechenregeln zur Integration in einer Variablen

i)

$$\int_G c f(x, y)\; dA = c \int_G f(x, y)\; dA, \quad c \in \mathbb{R}$$

ii)

$$\int_G f(x, y) \pm g(x, y)\; dA = \int_G f(x, y)\; dA \pm \int_G g(x, y)\; dA$$

iii)

$$\int_G f(x, y)\; dA \le \int_G g(x, y)\; dA,\ falls\ \forall (x, y) \in G:\ f(x, y) \le g(x, y)$$

iv)

$$\int_G f(x, y)\; dA = \int_{G_1} f(x, y)\; dA + \int_{G_2} f(x, y)\; dA,\ falls\ G = G_1 \cup G_2$$

13 Parametrisierungen

13.1 Repetitionsfragen

- Was ist eine Parametrisierung? Geben Sie Beispiele an!
- Was ist ein Parameter?
- Wie sind im Kontext von Parametrisierungen (momentane) Geschwindigkeit, (momentane) Schnelligkeit und (momentane) Beschleunigung definiert? ✍
  $\rightarrow$ Serie 10, Aufgabe 1

13.2 Tatsachen und Regeln

Falls wir eine parametrisierte Kurve $\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $a \leq t \leq b$ anschauen, kann die **Länge L der Kurve** wie folgt berechnet werden

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

wobei wir annehmen, dass die Bahn genau einmal von der betrachteten Parametrisierung durchlaufen wird.

Ausserdem gilt, dass die Länge - unter der obigen Bedingung - unabhängig ist von der gewählten Parametrisierung.

14 Vektorfelder

14.1 Repetitionsfragen

- Was versteht man unter dem Begriff Vektorfeld? Geben Sie Beispiele von Vektorfeldern an!
- Wodurch ist ein Gradientenfeld charakterisiert?
- Was ist eine Feldlinie?
- Was ist das Richtungsfeld? Welche Informationen liefert Ihnen das Richtungsfeld, respektive, wo wird dieses Konzept angewandt? ✍
  → Serie 11, Aufgaben 3 und 4
- Was sind stabile und instabile Gleichgewichtslösungen?

15 Linienintegrale

15.1 Repetitionsfragen

- Was steckt hinter dem Konzept des Linienintegrals?
- Was für Linienintegrale kennen Sie, und wie lauten die dazugehörigen rechnerischen Umsetzungen? Denken Sie auch an verschiedene Beispiele mit entsprechenden physikalischen Interpretationen!
  $\rightarrow$ Serie 12, Aufgabe 1 und 3
- Was unterscheidet eine orientierte Kurve von einer einfachen zusammenhängenden Menge von Punkten?
- Erklären Sie den Begriff "Durchlaufrichtung" anhand von Beispielen!
- Wann nennt man ein Vektorfeld konservativ? Gibt es Kriterien dafür?
- Was ist ein wegunabhängiges Linienintegral?
- Erklären Sie die Begriffe "Potentialfeld" und "Potentialfunktion"! Wie hängen zudem diese Begriffe miteinander zusammen?
  $\rightarrow$ Serie 13, Aufgabe 1
- Wann wird ein Gebiet einfach zusammenhängend genannt?
- Was ist ein Umlaufintegral?

15.2 Tatsachen und Regeln

Zur Berechnung von **Linienintegralen von Vektorfeldern** sind die folgenden Rechenregeln zu berücksichtigen

i) $\int_C \lambda\vec{F} \cdot d\vec{p} = \lambda \int_C \vec{F} \cdot d\vec{p}$

ii) $\int_C (\vec{F} \pm \vec{G}) \cdot d\vec{p} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{p} \pm \int_C \vec{G} \cdot d\vec{p}$

iii) $\int_{C_1+C_2} \vec{F} \cdot d\vec{p} = \int_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{p} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{p} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{p}$

iv) $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{p} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{p}$

Im Falle von **Linienintegralen skalarer Grössen** gelten die analogen Regeln

i) $\int_C \lambda f \; ds = \lambda \int_C f \; ds$

ii) $\int_C (f \pm g) \; ds = \int_C f \; ds \pm \int_C g \; ds$

iii) $\int_{C_1+C_2} f \; ds = \int_{C_1 \cup C_2} f \; ds = \int_{C_1} f \; ds + \int_{C_2} f \; ds$

Die Konzepte eines konservativen Vektorfeldes und eines Gradientenfeldes hängen wie folgt zusammen:
Ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}$, welches auf einem offenen und einfach zusammenhängenden Gebiet G definiert ist, ist genau dann ein konservatives Vektorfeld, wenn $\vec{F}$ ein Gradientenfeld (Potentialfeld) ist, d.h. falls es eine (differenzierbare) Potentialfunktion f gibt, welche auf G definiert ist, so dass gilt $\vec{F} = \nabla f$.

Der **Hauptsatz für Linienintegrale** lautet:
Ist $\vec{F}$ ein stetiges Gradientenfeld und K eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen den Punkten P und Q, so gilt

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{p} = \int_K \nabla f \cdot d\vec{p} = f(Q) - f(P)$$

✍

→ Serie 13, Aufgabe 2

Schliesslich gelten die beiden äquivalenten **Charakterisierungen konservativer Vektorfelder**:

i) Für jede beliebige geschlossene (stückweise differenzierbare) orientierte Kurve K gilt

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{p} = \oint_K \vec{F} \cdot d\vec{p} = 0$$

ii) Das betrachtete Vektorfeld $\vec{F} = F_1\vec{e}_x + F_2\vec{e}_y$ hat stetige Ableitungen, wird auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet betrachtet und erfüllt die folgende Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$