

1.1. Lineare ODE mit konstanten Koeffizienten.

(a) Setzen wir $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \omega^2,$$

welches die beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = \omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\omega$$

besitzt. Somit ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x},$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Die Lösung kann auch als

$$y(x) = C \sinh(\omega x) + D \cosh(\omega x), \quad C, D \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

(b) Setzen wir $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2,$$

welches die beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = i\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\omega$$

besitzt. Somit ist die allgemeine reelle Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(Die komplexe Lösung wäre

$$y(x) = Ce^{i\omega x} + De^{-i\omega x}$$

für $C, D \in \mathbb{R}$.)

(c) Wir suchen zuerst eine allgemeine Lösung des homogenen Problems und danach eine partikuläre des inhomogenen Problems. Mit Superposition kriegen wir dann die Gesamtlösung.

Das charakteristische Polynom des homogenen Problems lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (-3 \pm i\sqrt{7}).$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + Be^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

Die partikuläre Lösung ermitteln wir, indem wir den Ansatz

$$y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

in die DGL einsetzen:

$$-6A \sin(2x) + 6B \cos(2x) = \cos(2x).$$

Mit Koeffizientenvergleich ist somit die partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{1}{6} \sin(2x)$ und damit die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + Be^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{1}{6} \sin(2x).$$

(d) Das charakteristische Polynom des homogenen Problems ist:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 8 = 0.$$

Raten und Polynomdivision liefern zweimal die Nullstelle -2 und dann ein quadratisches Polynom, das mit Standardmethoden aufgelöst werden kann. Insgesamt ergibt sich

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 8 = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i),$$

also die Nullstellen $1 + i$, $1 - i$ und -2 , wobei -2 eine doppelte Nullstelle ist. Damit hat die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die Gestalt

$$y(x) = Ae^x \cos(x) + Be^x \sin(x) + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems kann man mit einem Ansatz suchen. Der naheliegende Ansatz wäre αe^{-2x} , da dies allerdings eine Lösung des homogenen Problems ist, wird dieser Ansatz nicht funktionieren. Ebenso verhält es sich mit $\alpha x e^{-2x}$. In solch einem Fall ist der Ansatz $\alpha x^2 e^{-2x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ vielversprechend. Tatsächlich ergibt Einsetzen, dass

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^3}{dx^3} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 8\right)(\alpha x^2 e^{-2x}) = 20\alpha e^{-2x}.$$

Folglich muss $\alpha = 1/20$ sein und $\frac{x^2}{20}e^{-2x}$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = Ae^x \cos(x) + Be^x \sin(x) + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x} + \frac{x^2}{20}e^{-2x},$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ frei wählbar sind.

1.2. ODE 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten.

(a) Nehmen wir an, dass die Lösung an einem Punkt $y \neq 0$ ist, so folgt mittels Separation:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 y; \\ \frac{dy}{y} &= x^2 dx; \\ \int \frac{dy}{y} &= \int x^2 dx + C \quad (C \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$

und somit

$$\ln |y| = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow |y(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = Ke^{\frac{1}{3}x^3}.$$

Wir bemerken, dass die konstante Lösung $y(x) = 0$ auch gültig ist. Deshalb ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = Ke^{\frac{1}{3}x^3}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(b) Die homogene Lösung $y' - y/x = 0$, $x > 0$ erhalten wir mit Separation

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}; \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x}; \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$

wir erhalten $\ln |y| = \ln(x) + C \Rightarrow |y| = e^C x$. Die Lösung der homogenen Gleichung ist $y = (\pm)e^C x = Kx$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir mit Variation der Konstanten $y(x) = K(x)x$. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung erhalten wir $K'(x)x = x$. Somit ist $K(x) = x + C$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = (x + C)x.$$

(c) Multiplikation der Gleichung mit der strikt positiven Funktion $e^{\frac{x^6}{6}}$ führt zu

$$e^{\frac{x^6}{6}} y'(x) + x^5 e^{\frac{x^6}{6}} y(x) = e^{\frac{x^6}{6}} (x^6 + 1).$$

Bemerke, dass die linke Seite gemäß der Produktregel auch als $(e^{\frac{x^6}{6}} y)'$ geschrieben werden kann. Für den Term auf der rechten Seite kann durch Integration eine Stammfunktion bestimmt werden. Oder aber man bemerkt

$$e^{\frac{x^6}{6}} (x^6 + 1) = x \cdot (x^5 e^{\frac{x^6}{6}}) + 1 \cdot e^{\frac{x^6}{6}} = (x e^{\frac{x^6}{6}})',$$

wieder mit der Produktregel. Es folgt also, dass $e^{\frac{x^6}{6}} y(x) - x e^{\frac{x^6}{6}}$ eine konstante Funktion ist. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = C e^{-\frac{x^6}{6}} + x,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden darf.

(d) Wir verwenden die Substitution $z = x + y$, d.h. $z' = 1 + y'$. Die DGL wird dann $z' = z^2 + 1$, also separierbar. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \Rightarrow \arctan z = x + c, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Somit erhalten wir die Lösung(en): $z(x) = \tan(x + C)$, $C \in \mathbb{R}$, also $y(x) = \tan(x + C) - x$, $C \in \mathbb{R}$.

(e) Wir multiplizieren beide Seiten mit $\rho(x) = e^{-x}$, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} e^{-x} y'(x) - e^{-x} y &= e^{-x} \sin x \Rightarrow \frac{d}{dx} (y(x) e^{-x}) = e^{-x} \sin x \\ \Rightarrow y(x) &= e^x \int e^{-x} \sin x \, dx + C e^x \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral wird durch partielle Integration berechnet:

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x),$$

somit erhalten wir die Lösung(en): $y(x) = -\frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + C e^x$, $C \in \mathbb{R}$.

(f) Wir sehen, dass die konstanten Funktionen $y \equiv 1$ und $y \equiv -1$ Lösungen der DGL sind. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

Somit erhalten wir die Lösung(en):

$$y(x) = 1, \quad y(x) = -1, \quad y(x) = \sin(\arcsin x + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die nicht konstanten Lösungen können äquivalent als $y(x) = x \cos C + (\sqrt{1-x^2}) \sin C$ geschrieben werden.

(g) Wir sehen, dass die konstante Funktion $y \equiv -1$ Lösung der DGL ist. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$y \frac{dy}{dx} = (1+y)x^2 \Rightarrow \int \frac{y}{1+y} dy = \int x^2 dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = \int x^2 dx,$$

somit erhalten wir die implizite Relation für die nicht konstanten Lösungen der DGL:

$$y - \log|1+y| = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.3. Anfangswert- und Randwertprobleme.

(a) Die allgemeine Lösung der DGL können wir durch direkte Integration bekommen:

$$y' = 2e^{2x} \Rightarrow y(x) = \int 2e^{2x} dx + C \Rightarrow y(x) = e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung verlangt $2 = y(0) = 1 + C$ und somit $C = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann

$$y(x) = e^{2x} + 1.$$

(b) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ hat die folgende Form:

$$y(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x).$$

Die Randbedingungen verlangen

$$\begin{aligned}0 &= y(0) = B, \\2 &= y(L) = A \sin(2L) + B \cos(2L).\end{aligned}$$

Da nun aber $B = 0$ ist, lautet die zweite Gleichung $A \sin(2L) = 2$. Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung für A , wenn $\sin(2L) \neq 0$ ist, das heisst, wenn $2L \neq \pi n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist. Wir haben also: Für $L = \frac{\pi}{2}n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ besitzt das Problem keine Lösung. Für alle anderen $L \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung des Randwertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{2}{\sin(2L)} \sin(2x).$$

Eine Probe zeigt, dass dies auch tatsächlich eine Lösung ist.

1.4. Federpendel Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x_{all}(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2\omega$ folgt:

$$\begin{aligned}x(0) = 1 &\Rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 1, \\ \dot{x}(0) = 2\omega &\Rightarrow -C_1\omega \sin(0) + C_2\omega \cos(0) = C_2\omega = 2\omega.\end{aligned}$$

Somit gilt $C_1 = 1$ und $C_2 = 2$. Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \cos(\omega t) + 2 \sin(\omega t).$$

(b) Mit den Randbedingungen $x(0) = 1$ und $x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}x(0) = 1 &\Rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 1, \\ x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1 &\Rightarrow C_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + C_2 \sin(\frac{\pi}{2}) = C_2 = 1.\end{aligned}$$

Somit gilt $C_1 = C_2 = 1$. Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$