2.1. Klassifikation von PDEs I. Die gegebenen Gleichungen sind

(a) eine inhomogene (f) lineare PDE 3. Ordnung (u_{xxx}).

(b) eine nichtlineare (u^2) PDE 2. Ordnung (u_{xx}).

(c) eine nichtlineare PDE 1. Ordnung.

(d) eine homogene lineare PDE 2. Ordnung. Die Gleichung ist elliptisch, denn:

$$2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$$

(e) eine inhomogene (g) lineare PDE 2. Ordnung. Die Gleichung ist hyperbolisch, denn:

$$(1 - x^2)(1 - y^2) - (-xy)^2 = 1 - x^2 - y^2 < 0,$$

auf dem Gebiet Ω.

2.2. Klassifikation von PDEs II.

(a) Nichtlinear, 3. Ordnung.

(b) Nichtlinear, 2. Ordnung.

(c) Linear, homogen, 2. Ordnung, elliptisch, da $4 \cdot 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 0$.

(d) Linear, nicht homogen, 2. Ordnung. Die Determinante der betreffenden Matrix ist:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)(y^2 - 2) - 4x^2y^2 &= -2(x^2 + y^2) - 3x^2y^2 + 4 \\ &\le -32 - 3x^2y^2 + 4 < 0 \quad \text{in } \Omega,\end{aligned}$$

somit ist die PDGl hyperbolisch.

2.3. Lösungskandidaten.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\partial_x u(x,y) &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ \partial_y u(x,y) &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ \partial_{xx} u(x,y) &= -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \frac{2x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ \partial_{yy} u(x,y) &= -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + y \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y = \frac{2y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}$$

Damit ist $\Delta u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = u(x,y)^3$. Folglich ist $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(b) Wir setzen unsere Funktion u in die Wellengleichung ein:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f''(t)\sin(kx) + c^2 f(t) k^2 \sin(kx) \\ &= (f''(t) + c^2 k^2 f(t))\sin(kx). \end{aligned}$$

Damit $u_{tt} - cu_{xx} = 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muss f

$$f''(t) + (kc)^2 f(t) = 0$$

erfüllen. Diese ODE hat charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + (kc)^2 = 0,$$

welches die Nullstellen $\lambda = ikc$ und $\lambda = -ikc$ besitzt.

Daher kann f als

$$f(t) = A\cos(kct) + B\sin(kct) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.