3.1. Wellengleichung und Superpositionsprinzip. Wir müssen nicht die allgemeine, sondern nur irgendeine Lösung der ODE finden. Dazu suchen wir beliebige Lösungen von

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= \sin^2(t), \\ w_{tt} - 4w_{xx} &= \tan^2(x) \end{aligned}$$

und setzen $u = v + w$.

Eine Lösung der ersten PDE erhalten wir durch zweimaliges Integrieren von $\sin^2(t)$ nach t. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t &= -\cos(t)\sin(t) + \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\cos(t)\sin(t) + \int (1 - \sin^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\cos(t)\sin(t) + t - \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(-\cos(t)\sin(t) + t\right)$ und somit ist

$$v(t) = \int \frac{1}{2}\left(-\cos(t)\sin(t) + t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\cos^2(t) + t^2\right]$$

eine Lösung der ersten PDE. Eine Lösung der zweiten PDE erhalten wir durch zweimaliges Integrieren von $\tan^2(x)$ nach x. Zuerst berechnen wir

$$\int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\tan^2(x) + 1\right) - 1\,\mathrm{d}x = \tan(x) - x.$$

Somit ist

$$w(x) = -\frac{1}{4}\int \tan(x) - x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\left[-\ln|\cos(x)| - \frac{1}{2}x^2\right]$$

eine Lösung der zweiten PDE. Wie oben erwähnt ist gemäss dem Superpositionsprinzip

$$u(x,t) = v + w = \frac{1}{4}\left[\cos^2(t) + t^2\right] - \frac{1}{4}\left[-\ln|\cos(x)| - \frac{1}{2}x^2\right]$$

eine Lösung der betrachteten PDE.

3.2. Variablenwechsel.

(a) Mit der Variablensubstitution

$$\begin{cases} s = x + y\,, \\ t = 2x \end{cases}$$

folgt für $v(s(x,y), t(x,y)) = u(x,y)$, dass

$$u_x = v_s + 2v_t \quad \text{und}$$
$$u_y = v_s\,.$$

Daraus berechnen wir weiter

$$u_{xx} = v_{ss} + 2v_{st} + 2v_{ts} + 4v_{tt} = v_{ss} + 4v_{st} + 4v_{tt}\,,$$
$$u_{xy} = v_{ss} + 2v_{ts}\,,$$
$$u_{yy} = v_{ss}\,.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} &= v_{ss} + 4v_{st} + 4v_{tt} - 2(v_{ss} + 4v_{ts}) + 5v_{ss} \\ &= 4(v_{ss} + v_{tt})\,. \end{aligned}$$

Somit erfüllt $v(s,t)$ die ODE

$$4(v_{ss} + v_{tt}) = 0\,.$$

(b) Mit der Variablensubstitution

$$\begin{cases} s = \cos(x) + x - y\,, \\ t = \cos(x) - x - y \end{cases}$$

folgt für $v(s(x,y), t(x,y)) = u(x,y)$, dass

$$u_x = (1 - \sin(x))v_s - (\sin(x) + 1)v_t \quad \text{und}$$
$$u_y = -(v_s + v_t)\,.$$

Daraus berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{ss}(-\sin(x) + 1)^2 + v_{st}(\sin^2(x) - 1) - v_s\cos(x) \\ &\quad + v_{ts}(\sin^2(x) - 1) + v_{tt}(\sin(x) + 1)^2 - \cos(x)v_t\,, \\ &= v_{ss}(-\sin(x) + 1)^2 + 2(\sin^2(x) - 1)v_{ts} \\ &\quad v_{tt}(\sin(x) + 1)^2 - \cos(x)(v_t + v_s) \\ u_{xy} &= -\left(v_{ss}(1 - \sin(x)) - 2\sin(x)v_{ts} - v_{tt}(1 + \sin(x))\right)\,, \\ u_{yy} &= v_{ss} + 2v_{ts} + v_{tt}\,. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y \\
&\quad = v_{ss}(-\sin(x)+1)^2 + 2(\sin^2(x)-1)v_{ts} \\
&\qquad + v_{tt}(\sin(x)+1)^2 - \cos(x)(v_t + v_s) \\
&\qquad + 2\sin(x)[v_{ss}(1-\sin(x)) - 2\sin(x)v_{ts} - v_{tt}(1+\sin(x))] \\
&\qquad - \cos^2(x)[v_{ss} + 2v_{ts} + v_{tt}] + \cos(x)[v_s + v_t]
\end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = -4v_{ts}\,.$$

Damit erfüllt v die PDG

$$-4v_{ts} = 0\,.$$

(c) Die allgemeine Lösung der PDG

$$-4v_{ts} = 0$$

folgt nach zweimaligem Integrieren

$$v(s,t) = F(s) + G(t) \quad \text{für} \quad F, G \in C^1(\mathbb{R})\,.$$

3.3. Separation der Variablen.

(a) Die Substitution $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ liefert

$$y(x) = xv(x), \qquad y'(x) = v(x) + xv'(x)$$

und die DGL ist äquivalent zu

$$x(v(x) + xv'(x)) = xv(x) + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad v'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(x) = x + c$$

Es folgt

$$y(x) = x(x+c)$$

.

Alternativ lösen wir zuerst die homogene Gleichung $xy_h'(x) = y_h(x)$. Mit Separation der Variablen ergibt dies

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy_h}{y_h} &= \int \frac{dx}{x} \\
\log|y_h| &= \log|x| + C \\
y_h &= Ax,
\end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung können wir den Ansatz $y_p(x) = \alpha x^2$ einsetzen (oder alternativ den etwas komplizierteren Ansatz $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$) und kriegen $y_p(x) = x^2$ und damit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ax + x^2.$$

(b) Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \sin(x)\,dx + C \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-y} = -\cos(x) + C$$

und umformen liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\log(\cos(x) - C).$$

Beachte, dass die Lösung nur für $-C > 1$ für alle x reell ist.

(c) Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1-x^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$

und somit

$$y(x) = \pm e^C \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

3.4. Anfangswertprobleme.

(a) Die Lösung der homogenen Gleichung $y' + 2y = 0$ ist gegeben durch $y = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Für die partikuläre Lösung nutzen wir den Ansatz $y_p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, wobei wir α, β, γ bestimmen werden. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\beta + 2\gamma x + 2\alpha + 2\beta x + 2\gamma x^2 \stackrel{!}{=} x^2$$

und damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \beta + 2\alpha &= 0 \\ 2\gamma + 2\beta &= 0 \\ 2\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Auflösen und Einsetzen liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

Einsetzen des Anfangswertes ergibt $-2 = C + \frac{1}{4}$, also $C = -\frac{9}{4}$ und damit

$$y(x) = -\frac{9}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

(b) Die homogene Gleichung $y' + y = 0$ hat die Lösung $y(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Für die partikuläre Lösung wählen wir den Ansatz $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$, α und β zu bestimmen. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$-\alpha \sin x + \beta \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x \stackrel{!}{=} 2 \sin x$$

und damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta &= 2 \\ \beta + \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung ist dann

$$y(x) = Ce^{-x} - \cos x + \sin x.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$y(x) = (\pi + 1)e^{-x} - \cos x + \sin x.$$

3.5. Logistische Gleichung

Wir lösen zunächst die homogene Gleichung $y'(t) = ay(t)$. Die Lösung hiervon ist $y(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{R}$. Nun nutzen wir Variation der Konstanten, indem wir $y(t) = C(t)e^{at}$ annehmen. Einsetzen in der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at} &= aC(t)e^{at} - bC(t)^2 e^{at} \\ \Rightarrow \frac{C'}{C^2} &= -be^{at}. \end{aligned}$$

Diese ODE für C können wir mit Separation der Variablen lösen und wir kriegen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{C} &= -\frac{b}{a}e^{at} - B \\ C &= \frac{1}{\frac{b}{a}e^{at} + B} \end{aligned}$$

für $B \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der ODE ist dann

$$y(t) = \frac{e^{at}}{\frac{b}{a}e^{at} + B} = \frac{1}{\frac{b}{a} + Be^{-at}}.$$

Für das Anfangswertproblem setzen wir $y(0) = \frac{1}{\frac{b}{a}+B} \stackrel{!}{=} y_0$ und kriegen $B = \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}$, also

$$y(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right) e^{-at}}.$$

Für $t \to \infty$ konvergiert die Funktion, unabhängig vom Anfangswert y_0, gegen $\frac{a}{b}$, welches auch die konstante Lösung der ODE ist.