**4.1. Orthonormale Funktionen.** Wir beachten zuerst, dass für $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, gilt

$$\int_a^b \cos \frac{2k\pi x}{T}\, dx = \frac{T}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{T}\Big|_a^b = 0,$$
$$\int_a^b \sin \frac{2k\pi x}{T}\, dx = -\frac{T}{2k\pi} \cos \frac{2k\pi x}{T}\Big|_a^b = 0.$$

Die Fälle, die $e_0$ involvieren ergeben sich dadurch sofort, wir können also im Folgenden annehmen, dass $n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
e_m \cdot e_n &= \frac{2}{T} \int \cos \frac{2n\pi x}{T} \cos \frac{2m\pi x}{T}\, dx \\
&= \frac{1}{T} \int \cos \frac{2(n+m)\pi x}{T} + \cos \frac{2(m-n)\pi x}{T} \\
&= 0 + \frac{1}{T} \begin{cases} \int 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \\
f_m \cdot f_n &= \frac{2}{T} \int \sin \frac{2m\pi x}{T} \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx \\
&= \frac{1}{T} \int \cos \frac{2(m-n)\pi x}{T} - \cos \frac{2(n+m)\pi x}{T} \\
&= \frac{1}{T} \begin{cases} \int 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} + 0 \\
e_m \cdot f_n &= \frac{2}{T} \int \cos \frac{2m\pi x}{T} \sin \frac{2n\pi x}{T}\, dx \\
&= \frac{1}{T} \int sin \frac{2(n-m)\pi x}{T} + \sin \frac{2(n+m)\pi x}{T} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung auch für $n = m$ gilt, da $\sin 0 = 0$.

**4.2. Periodische Funktionen**

**(a)** $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ist periodisch mit Periode $4\pi$ und $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ ist periodisch mit Periode $6\pi$. Daraus folgt, dass $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ Periode $(\mathrm{kgV}\{4,6\})\pi = 12\pi$ hat. Wir können das kontrollieren:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x+12\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+12\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) \\
&= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right) .
\end{aligned}$$

**(b)** Da $\sin(x)$ $2\pi$-periodisch ist folgt, dass auch $\tan(\sin(x))$ $2\pi$-periodisch ist.

**(c)** Da $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ $\pi$-periodisch sind, folgt (wie in (a)), dass $\sin^2(x) - \cos^2(x)$ $\pi$-periodisch ist. *Alternativ*: aus der Beziehung

$$\sin^2(x) - \cos^2(x) = -\cos(2x)$$

folgt, dass $\sin^2(x) - \cos^2(x)$ $\pi$-periodisch ist.

**(d)** Der Term $\frac{x^2}{2}$ verhindert, dass die Funktion periodisch ist.

**(e)** Aus der Beziehung

$$\sin(2x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$$

folgt, dass $\sin(2x)\cos(2x)$ $\frac{\pi}{2}$-periodisch ist.

### 4.3. Reelle Fourier-Reihen

**(a)** Aus der Beziehung $\cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \cos(6x)$ erhalten wir unmittelbar

$$a_6 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \quad \text{falls} \quad n \neq 6,$$

und weiter

$$b_n = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

**(b)** Da $x^3$ ungerade ist, gilt $a_k = 0 \quad \forall k$. Es bleibt

$$b_k = \int_{-1}^{1} x^3 \sin(\pi k x)\, dx$$

zu berechnen. Mittels partieller Integration berechnen wir:

$$\int_{-1}^{1} x^3 \sin(\pi k x)\, dx = \frac{2(-1)^k(6 - \pi^2 k^2)}{k^3\pi^3} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Somit ist die Fourier-Reihe

$$x^3 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k(6 - \pi^2 k^2)}{k^3\pi^3} \sin(\pi k x).$$

**4.4. Fourier-Reihen und numerische Reihen** Siehe das Lösungsblatt der Prüfung vom Februar 2012 (→ Kurs-Webpage).

**4.5. Integration periodischen Funktionen** Wir nehmen an, dass $A \geq 0$, der Fall $A < 0$ ist ähnlich.

$$\int_A^{A+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{T+A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Durch einen Variablenwechsel $y = x - T$, und da $f$ $T$-periodisch ist, erhalten wir, dass

$$\int_T^{T+A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A f(y+T)\,\mathrm{d}y = \int_0^A f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Somit

$$\int_A^{A+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$