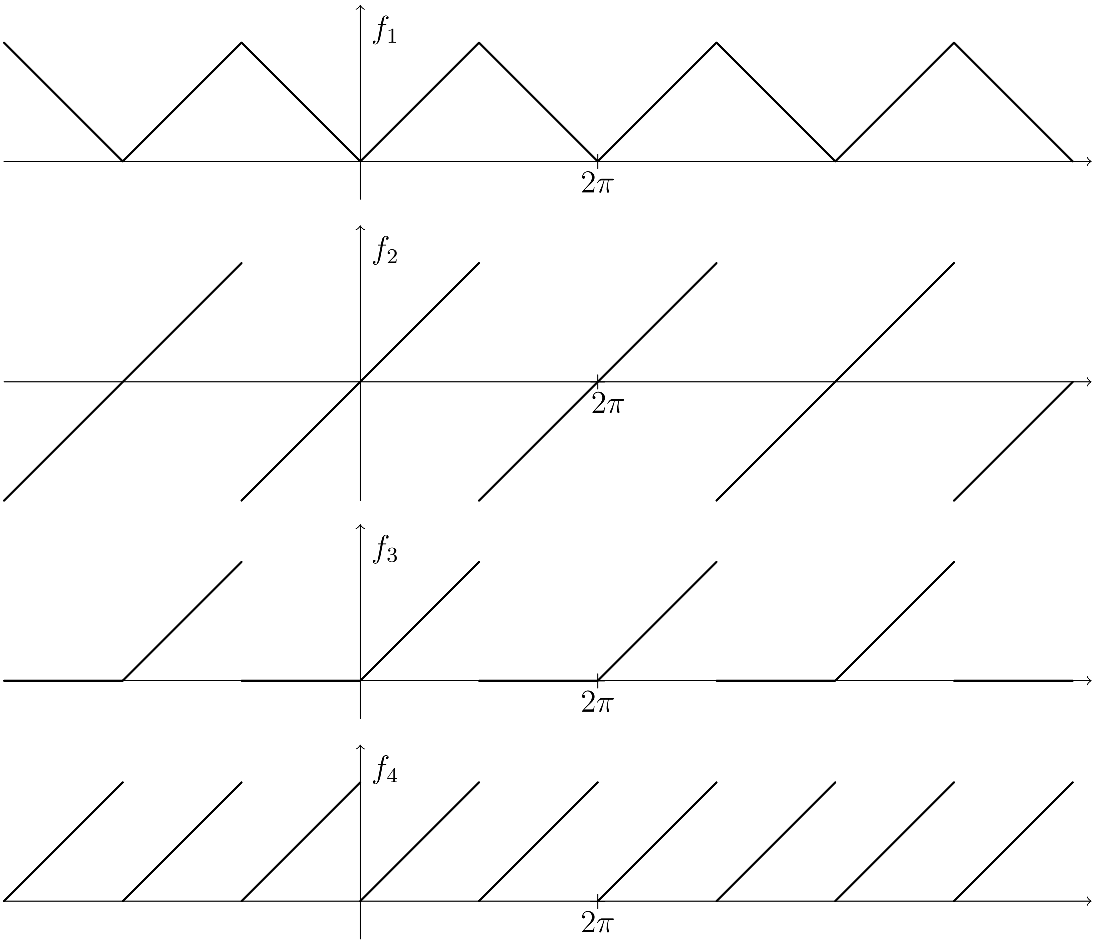
### 5.1. Gerade und ungerade Fortsetzung.

**(a)** Die Graphen der $f_i$ sehen wie folgt aus:




**i)** Die gerade Erweiterung $f_1$ hat die Periode $T = 2\pi$. Da die Funktion $f_1$ gerade ist gilt $b_n = 0$. Weiter berechen wir

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \,\mathrm{d}x = 2\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}x = \pi,$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{x \sin(nx)}{n} \bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \bigg|_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die zu $f_1(x)$ assoziierte Fourierreihe

$$f_1(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx)\,.$$

**ii)** Die ungerade Erweiterung $f_2$ hat die Periode $T = 2\pi$. Für ungerade Funktionen gilt $a_n = 0$ und wir berechen

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{-x\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{-\pi(-1)^n}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

**iii)** Die Funktion $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ist $2\pi$ periodisch und mit *i)* und *ii)* erhalten wir die Fourier Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_0(f_1) + a_0(f_2)}{2} = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{a_n(f_1) + a_n(f_2)}{2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\ b_n &= \frac{b_n(f_1) + b_n(f_2)}{2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

**iv)** Da die Funktion $f_4$ die Periode $T = \pi$ hat, gilt

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Für die Berechung der $a_n$ und $b_n$ können wir die Berechung von *i)* und *ii)* verwenden. Wir ersetzen dabei einfach $n$ durch $2n$. Dies sieht dann wie folgt aus

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\pi} x \cos(2\pi n x/T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(2nx)\,dx \\ &= \frac{2((-1)^{2n} - 1)}{\pi (2n)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\pi} x \sin(2\pi n x/T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(2nx)\,dx \\ &= \frac{2(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{(-1)}{n}. \end{aligned}$$

Damit ist die zu $f_4(x)$ assozierte Fourierreihe

$$f_4(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2nx)\,.$$

Wir sehen, dass $f_4(x) - \pi/2$ eine ungerade Funktion ist. Zur Kontrolle kann man dies anhand der Skizze nachvollziehen.

**(b)** Da die Funktion $f_1(x)$ überall stetig ist, können wir nach dem Theorem von Riemann-Lebesgue

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx) \tag{1}$$

schreiben. Setzen wir nun in (1) den Wert $x = \pi$ so folgt aus $\cos(n\pi) = (-1)^n$, dass

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}(-1)^n = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)^2}\,.$$

Lösen wir diese Gleichung auf, folgt

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ ungerade}}} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**5.2. Reelle und komplexe Fourierreihe.** Sei $f(x) = e^x$ für $x \in (0, \pi)$. Wir berechnen die komplexe Fourierreihe der $2\pi$ periodischen geraden Fortsetzung von $f(x)$.

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^x e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-x} e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(1-ik)x}\,dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-(1+ik)x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-ik)\pi} - 1}{1 - ik} + \frac{e^{(1+ik)\pi} - 1}{1 + ik} \right) \\
&= \frac{e^{\pi}}{2\pi} \frac{(1+ik)e^{-i\pi k} + (1-ik)e^{i\pi k}}{1+k^2} - \frac{1}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{e^{\pi}}{\pi(1+k^2)} \left(\cos(\pi k) + k \sin(\pi k)\right) - \frac{1}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{e^{\pi}(-1)^k}{\pi(1+k^2)} - \frac{1}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe der gerade Fortsetzung

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)} e^{ikx}.$$

Um die reelle Fourierreihe zu bestimmen, benutzen wir die Relationen $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k}\,, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k})\,. \end{aligned}$$

Da $f$ gerade ist, gilt $b_k = i(c_k - c_{-k}) = 0$ und somit erhalten wir

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2c_k = 2\frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)}\,.$$

Damit ist die reelle Fourierreihe der gerade Fortsetzung

$$\frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)} \cos(kx).$$

Analog berechnen wir die komplexe Fourierreihe der $2\pi$ periodischen ungeraden Fortsetzung von $f(x)$,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^x e^{-ikx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-x} e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-ik)\pi} - 1}{1-ik} + \frac{1 - e^{(1+ik)\pi}}{1+ik}\right) \\ &= \frac{e^{\pi}}{2\pi}\frac{(1+ik)e^{-i\pi k} - (1-ik)e^{i\pi k}}{1+k^2} - \frac{ik}{\pi(1+k^2)} \\ &= \frac{e^{\pi}}{\pi(1+k^2)}\left(-i\sin(\pi k) + ik\cos(\pi k)\right) - \frac{ik}{\pi(1+k^2)} \\ &= ik\frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)}\,. \end{aligned}$$

Da $f$ ungerade ist, gilt $a_k = c_k + c_{-k} = 0$ und wir erhalten

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2ic_k = -2k\frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)}\,.$$

## 5.3. Fragen zur Fourierreihendarstellung

**(a)** Nein: Die Funktion ist nicht periodisch.

**(b)** Nein: Eine endliche Fourier-Summe ist überall stetig auf $\mathbb{R}$ und die $\pi$-periodische Fortsetzung von $g$ ist nicht stetig.

## 5.4. Reelle und komplexe Fourier-Reihe II.

**(a)** Aus der Relation $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ schliessen wir

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) .$$

Damit lassen sich die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe einfach berechnen. Zuerst folgt für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x} + 2\right] e^{-i\pi n x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8(2-i\pi n)} e^{(2-i\pi n)x}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{8(2+i\pi n)} e^{-(2+i\pi n)x}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{4i\pi n} e^{-i\pi n x}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{(-1)^n(e^2 - e^{-2})}{8(2-i\pi n)} - \frac{(-1)^n(e^{-2} - e^2)}{8(2+i\pi n)} \\ &= \frac{(-1)^n \sinh(2)}{4 + \pi^2 n^2} . \end{aligned}$$

Für $n = 0$ schliessen wir

$$c_0 = \frac{\sinh(2)}{4} + \frac{1}{2} .$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe durch

$$\cosh^2(x) \sim \frac{1}{2} + \sinh(2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 + \pi^2 n^2} e^{-i\pi n x}$$

gegeben.

**(b)** Um die reelle Fourierreihe zu bestimmen, benutzen wir die Relationen $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} , \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) . \end{aligned}$$

Da $\cosh^2(x)$ eine gerade Funktion ist folgt unmittelbar $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Wir berechnen

$$a_n = \frac{2\sinh(2)}{4 + \pi^2 n^2}(-1)^n .$$

Damit ist die reelle Fourierreihe

$$\cosh^2(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{\sinh(2)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(2)}{4+\pi^2 n^2}(-1)^n \cos(n\pi x)\,.$$

**5.5. Fourier-Reihe.**

**(a)** $f$ hat Periode $T = \pi$. Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe sind

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)| \mathrm{e}^{-2inx}\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} -\sin(x)\mathrm{e}^{-2inx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\mathrm{e}^{-2inx}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $x' = -x$ im ersten Integral und dank der eulerschen Formel $\cos(t) = (\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it})/2$, erhalten wir

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(x')\mathrm{e}^{2inx'}\,\mathrm{d}x' + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\mathrm{e}^{-2inx}\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)(\mathrm{e}^{2inx} + \mathrm{e}^{-2inx})\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Durch die trigonometrische Formel $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$, und da $\cos((2k+1)\pi/2) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$, erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin((2n+1)x) + \sin((1-2n)x)\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} - \frac{\cos((1-2n)x)}{1-2n}\right]_0^{\pi/2} \\ =& \frac{1}{\pi}\left(0 + 0 + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{1-2n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-4n^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe von $f$

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-4n^2}\mathrm{e}^{2inx}.$$

**(b)** Da $f$ gerade ist , gilt $b_k = 0$ für jede $k \in \mathbb{N}$; wir berechnen dann $a_k$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = \frac{4}{\pi}, \\ a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi}\frac{4}{1-4n^2} \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Damit ist die reelle Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{4}{1-4n^2}\cos(2nx).$$