6.1. Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Anfangsbedingungen Mithilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\sin^3(\alpha) = \frac{3\sin(\alpha) - \sin(3\alpha)}{4} \quad \text{and} \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha),$$

können wir den Anfangswert $u(x,0)$ umschreiben als

$$\sin^3(3\pi x) - 4\sin(4\pi x)\cos(4\pi x) = \frac{3}{4}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin(9\pi x) + 2\sin(8\pi x).$$

Wir sehen, dass $u(x,0)$ ein *endliches* trigonometrisches Polynom ist, das nur Sinus Funktionen enthält. Daher können wir ohne zu Zögern den Separationsansatz anwenden: das bedeutet, dass die Lösung unseres Problems von der Form

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{M} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

ist, wobei in unserem Fall $L = 1$, $M = 9$ und die Koeffizienten a_n wie oben sind. Genauer gesagt erhalten wir die Formel

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\sin(3\pi x)\mathrm{e}^{-9\pi^2 t} + 2\sin(8\pi x)\mathrm{e}^{-64\pi^2 t} - \frac{1}{4}\sin(9\pi x)\mathrm{e}^{-81\pi^2 t}.$$

(Für mehr Herleitung siehe z.B. die nächste Aufgabe.)

6.2. Wärmeleitungsgleichung mit Neumannrandbedingungen

(a) Da die Fortsetzung π-periodisch und gerade ist, hat sie die Form:

$$\sin(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx) \quad x \in [0,\pi].$$

Wir berechnen die Koeffizienten.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Mit Hilfe irgendwelcher trigonometrischer Formeln oder mit den Eulerschen Formeln berechnen wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left((2n+1)x\right) - \sin\left((2n-1)x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} \end{aligned}$$

Da die gerade π-periodische Fortsetzung stetig und stückweise differenzierbar ist, schliessen wir, dass die Fourierreihe punktweise konvergiert und daraus folgt

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2nx), \quad x \in [0, \pi].$$

(b) Mit dem Separationsansatz $U(x,t) = X(x)T(t)$ kommt man auf die Gleichungen

$$\begin{cases} X(x)T'(t) &= 4X''(x)T(t), \quad \text{für } 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ X'(0)T(t) &= 0, \quad \text{für } t > 0, \\ X'(\pi)T(t) &= 0, \quad \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung (und daraus, dass $T(t)$ nicht identisch gleich Null ist) folgt

$$\frac{4X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

für alle $x \in (0, \pi)$ und alle $t > 0$ und da dies nur der Fall sein kann, wenn dieser Wert eine Konstante (die im Folgenden λ genannt wird) ist, haben wir also für X die Bedingungen

$$\begin{cases} X''(x) &= \frac{\lambda}{4} X(x), \quad \text{für } 0 < x < \pi, \\ X'(0) &= 0, \\ X'(\pi) &= 0. \end{cases}$$

Bekanntlich sind die Lösungen für solche Differentialgleichungen von der Form

a) für $\lambda > 0$: $Ae^{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x}$,

b) für $\lambda = 0$: $A + Bx$,

c) für $\lambda < 0$: $A\cos(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}x)$.

Für den ersten Fall überprüft man leicht, dass die Bedingungen

$$X'(0) = 0 = X'(\pi)$$

keine andere Wahl als $A = B = 0$ lassen. Im zweiten Fall muss $B = 0$ sein, aber A kann beliebig gewählt werden. Im dritten Fall hingegen sind die Randbedingungen für X' genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{2}B\sqrt{-\lambda} = 0$$

und gleichzeitig

$$-\frac{1}{2}A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi\right) + \frac{1}{2}B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$$

gilt. Dieses System ist genau dann unterbestimmt, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi$ eine Nullstelle des Sinus ist, also $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ gilt und $B = 0$ für $n \neq 0$. (Beachte, dass n und $-n$ die gleiche Funktion liefern, deshalb wird im Folgenden stets $n > 0$ betrachtet; $n = 0$ korrespondiert zum zweiten, oben bereits betrachteten Fall). Für den zugehörigen λ-Wert ergibt sich für jedes $n \geq 0$:

$$\lambda_n = -4n^2.$$

Die zugehörige Eigenfunktion X_n lautet $X_n(x) = A_n \cos(nx)$, $C_b \in \mathbb{R}$ (beachte, dass dies auch für $n = 0$ passt) und die assoziierte Funktion T_n erfüllt die Differentialgleichung

$$T_n'(t) = -4n^2 T_n(t),$$

d.h. $T_n(t) = ce^{-4n^2 t}$ für alle $t \geq 0$. Durch Superposition dieser Lösungen kann schliesslich noch die Anfangsbedingung justiert werden: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-4n^2 t} \cos(nx)$ löst unser Anfangswertproblem mit homogenen Neumannrandbedingungen genau dann, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx) \overset{\text{von (a)}}{=} \sin(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2nx), \quad x \in [0,\pi].$$

Alles in allem hat die Lösung die Form (Vorsicht mit den Summationindex!)

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \mathrm{e}^{-16n^2 t} \cos(2nx), \quad x \in [0,\pi].$$

(c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \mathrm{e}^{-16n^2 t} \cos(2nx) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \mathrm{e}^{-16n^2 t} \int_0^{\pi} \cos(2nx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2} \mathrm{e}^{-16n^2 t} \underbrace{\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\pi}}_{=0} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Wir schliessen, dass die mittlere Temperatur des Stabees in der Tat konstant ist, übereinstimmend mit der Isolier-Annahme.

6.3. Fourier-Reihen und numerische Reihen (Prüfung August 2017) Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von August 2017 (→ Kurs-Webpage).

6.4. Fourier-Reihe II (Prüfung Januar 2017) Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von Januar 2017 (→ Kurs-Webpage). Wie dort gezeigt, ist die reelle Fourier-Reihe der Fortsetzung:

$$F(x) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right),$$

somit ist die komplexe Fourier-Reihe

$$F(x) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2} \mathrm{e}^{i\frac{n\pi x}{2}}.$$