7.1. Inhomogene Dirichletrandbedingungen. Eine stationäre Lösung $v(t,x) = v(x)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ v(0,t) = 1 & t \in \mathbb{R}_+ \\ v(1,t) = 2 & t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

ist gegeben durch $v(x) = x + 1$. Sei $w := u - v$; w löst dann das folgende inhomogene Problem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} w_t - 2w_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ w(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ w(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ w(x,0) = x + \cos^2(\pi x) - (x+1) = -1 + \cos^2(\pi x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Bekanntlich ist die Lösung dieses Problems gegeben durch

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x),$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$ die Fourierreihe der ungerade Fortsetzung von $-1 + \cos^2(\pi x)$ ist. Wir berechnen jetzt diese Reihe. Beachte, dass

$$-1 + \cos^2(\pi x) = -\sin^2(\pi x) = \frac{\cos(2\pi x) - 1}{2}$$

und damit:

$$\begin{aligned} C_n &= 2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi x) - 1}{2} \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi x)\sin(\pi n x) - \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\sin((2+n)\pi x) - \sin((2-n)\pi x)}{2} - \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((2+n)\pi x)}{(2+n)\pi} + \frac{\cos((2-n)\pi x)}{(2-n)\pi}\right]_0^1 + \frac{\cos(\pi n) - 1}{\pi n} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^n}{(2+n)\pi} - \frac{1-(-1)^n}{(2-n)\pi}\right] + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi n(n^2-4)} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, dass:

$$w(x,t) = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{8}{\pi n(n^2-4)} \mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t} \sin(\pi n x)$$

da $u = v + w$ ist, folgt

$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{8}{\pi n(n^2-4)} \mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t} \sin(\pi n x).$$

7.2. Wärmeleitungsgleichung in einem Ring

(a) Der Ausdruck für u_0 in der Bogenmass-Koordinate folgt sofort aus der Formel für die Länge eines Kreisbogens. u erfüllt zwingendermassen $u(\vartheta + 2\pi, t) = u(\vartheta, t)$, ist also eine 2π-periodische Funktion. Die Fouriertransformation von u (in ϑ) ist dann $u(\vartheta, t) = \sum c_n(t) e^{in\vartheta}$, $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t) e^{-in\vartheta}\, d\vartheta$. Andererseits, wenn wir die Gleichung (auf jeden Term) anwenden, kriegen wir

$$\sum \dot{c}_n e^{in\vartheta} + c_n n^2 e^{in\vartheta} = 0,$$

also $\dot{c}_n + c_n n^2 = 0$ und damit $c_n = b_n e^{-n^2 t}$ mit $b_n \in \mathbb{R}$. Vergleicht man diese zwei Darstellungen von c_n an der Stelle $t = 0$ sieht man, dass b_n genau die Fourierkoeffizienten von u_0 sind, insgesamt also:

$$u(\theta, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{u_0}(n) \mathrm{e}^{in\theta - n^2 t},$$

wobei $\widehat{u_0}(n)$ die Fourier-Koeffizienten von u_0 sind. Wir berechnen daher:

$$\begin{aligned}
\widehat{u_0}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \\
\widehat{u_0}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\theta) \mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{(-1 + \mathrm{e}^{i\pi n})^2}{2\pi n^2} = \frac{(1 - (-1)^n)^2}{2\pi n^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit schliessen wir, dass

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ ungerade}}} \frac{2}{\pi n^2} \mathrm{e}^{in\theta - n^2 t}.$$

Äquivalent kann dieser Ausdruck mit reellen Koeffizienten dargestellt werden:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ ungerade}}} \frac{4}{\pi n^2} \cos(n\theta) \mathrm{e}^{-n^2 t}.$$

(b) Eine partikuäre Lösung der Gleichung $u_t - u_{\theta\theta} = -2t$ ist offensichtlich $v(x,t) = v(t) = -t^2$ und wir sehen, dass $v(0) \equiv 0$. Somit schliessen wir mithilfe von (a) und dem Superpositionsprinzip, dass die Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t - u_{\theta\theta} = -2t & (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+, \\ u(\theta, 0) = u_0(\theta) & \theta \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

als

$$u(\theta,t) = -t^2 + \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n \text{ ungerade}}} \frac{2}{\pi n^2} \mathrm{e}^{in\theta - n^2 t}.$$

geschrieben werden kann.

7.3. Eigenschaften der Fouriertransformation.

(a) Linearität. Weil $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, gilt $af + bg \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[af + bg](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (af(x) + bg(x)) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x \\ &= a \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x + b \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x \\ &= a\mathcal{F}[f](\xi) + b\mathcal{F}[g](\xi). \end{aligned}$$

(b) Ableitung. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x \\ &= -i\mathcal{F}[xf(x)](\xi). \end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x \\ &= f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\mathrm{e}^{-i\xi x}) \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to+\infty} f(R) \mathrm{e}^{-i\xi R} - \lim_{R\to-\infty} f(R) \mathrm{e}^{-i\xi R} + i\xi \mathcal{F}[f](\xi). \end{aligned}$$

Weil $f \in L^1(\mathbb{R})$ muss $\lim_{R\to\pm\infty} f(R) = 0$ sein und weil $|\mathrm{e}^{-i\xi R}| = 1$ ist, gilt $\lim_{R\to\pm\infty} f(R)\mathrm{e}^{-i\xi R} = 0$, so dass wir schliessen können:

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\mathcal{F}[f](\xi).$$

(c) Höhere Ableitung. Was die Ableitungen höherer Ordnung betrifft, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)^k\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\\ &= (-i)^k\mathcal{F}[x^k f(x)](\xi).\end{aligned}$$

Für die letzte Aussage benutzen wir partielle Integration k mal auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f^{(k)}](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{f^{(k-1)}(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ weil } f^{(k-1)}\in L^1(\mathbb{R})} + (i\xi)\int_{\mathbb{R}} f^{(k-1)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{(i\xi)f^{(k-2)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ weil } f^{(k-2)}\in L^1(\mathbb{R})} + (i\xi)^2\int_{\mathbb{R}} f^{(k-2)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\\ &= \dots\\ &= (i\xi)^k\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = (i\xi)^k\mathcal{F}[f](\xi).\end{aligned}$$

(d) Translation/Modulation. Wegen $\int_{\mathbb{R}} |\tau_a f|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}x$, $\tau_a f \in L^1(\mathbb{R})$, und durch einen Variablenwechsel $y = x - a$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\tau_a f](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi a}e^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}[f(x)](\xi)e^{-i\xi a}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\tau_a\mathcal{F}[f](\xi) &= \mathcal{F}[f](\xi - a)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i(\xi-a)x}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[f(x)\mathrm{e}^{iax}](\xi).\end{aligned}$$

(e) Faltung/Multiplikation. Mit dem Satz von Fubini sieht man, dass die Funktion $(f * g)$, wie in der Aufgabenstellung definiert, eine L^1-Funktion ist. Damit ist die

Fouriertransformierte wohldefiniert und es gilt für ein beliebiges $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\,\mathrm{d}x\ g(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z)\mathrm{e}^{-i\xi z}\,\mathrm{d}z\ g(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi).
\end{aligned}$$

Für die andere Aussage kann man entweder eine ähnliche Aussage für die inverse Transformation zeigen und diese anwenden oder direkt rechnen, was im folgenden gezeigt wird:

$$\begin{aligned}
(\hat{f} * \hat{g})(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\hat{g}(\xi - y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-iz(\xi-y)}\,dz\right)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-iz(\xi-y)}\,dzdydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{g}(\xi - y)\,dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-\tilde{y})}\hat{g}(\tilde{y})\,d\tilde{y}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}2\pi g(x)\,dx \\
&= 2\pi\mathcal{F}[fg](\xi).
\end{aligned}$$

(Beachte, dass wir im Schritt mit der Variablentransformation $\tilde{y} = \xi - y$ kein zusätzliches Vorzeichen kriegen, weil wir die Grenzen auch gleich wieder umgedreht haben.)

(f) Zweimalige Transformation. Mit dem Satz, dass $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$, folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\hat{f}](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-iy\xi}\,d\xi \\
&= 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i(-y)\xi}\,d\xi \\
&= 2\pi f(-y).
\end{aligned}$$

(g) Integral. Hierfür verwenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Regel zur Ableitung von Funktionen und berechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_a^x f(y)\,dy \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}\varphi(x) &= f(x) \\
\Rightarrow i\xi\hat{\varphi}(\xi) &= \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Mit Umstellen folgt dann sofort die Behauptung.

(h) Streckung. Weil $f \in L^1(\mathbb{R})$, sind $\delta_\lambda f$ und $\delta_{1/\lambda} f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Durch einen Variablenwechsel $y = \lambda x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta_\lambda f](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi\frac{y}{\lambda}}\frac{dx}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\delta_{1/\lambda}\mathcal{F}[f](\xi),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda\mathcal{F}[f](\xi) &= \mathcal{F}[f](\lambda\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-i\xi y}\frac{\mathrm{d}y}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}[\delta_{1/\lambda} f](\xi).
\end{aligned}$$

7.4. Berechnung der Fourier-Transformation. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a|t|-i\xi t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{at-i\xi t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at-i\xi t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\mathrm{e}^{at-i\xi t}}{a-i\xi}\right|_{-\infty}^0 + \left.\frac{\mathrm{e}^{-at-i\xi t}}{-a-i\xi}\right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-i\xi} - \underbrace{\lim_{R\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{aR-i\xi R}}{a-i\xi}}_{=0} + \underbrace{\lim_{R\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-aR-i\xi R}}{-a-i\xi}}_{=0} + \frac{1}{a+i\xi} \\
&= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Ebenso für h:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[h](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(t)\mathrm{e}^{-a|t|-i\xi t}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{at-i\xi t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at-i\xi t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{at-i\xi t}}{a-i\xi}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{\mathrm{e}^{-at-i\xi t}}{-a-i\xi}\bigg|_{0}^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{a-i\xi} + \underbrace{\lim_{R\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{aR-i\xi R}}{a-i\xi}}_{=0} + \underbrace{\lim_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-aR-i\xi R}}{-a-i\xi}}_{=0} + \frac{1}{a+i\xi} \\
&= -\frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = -\frac{2i\xi}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$