8.1. Fourier-Transformation I.

(a) Es gilt für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\xi)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](-\xi).$$

(b) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

damit folgt aus Aufgabenteil (a)

$$e^{-a\xi^2} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[e^{-ax^2}]](\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\mathcal{F}[e^{-ax^2}]](-\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\right](-\xi),$$

also

$$\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\right](\xi) = 2\pi e^{-a(-\xi)^2} = 2\pi e^{-a\xi^2}.$$

(c) Es gibt eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda e^{-a\xi^2} = \mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt, genau dann, wenn $a = \frac{1}{4a}$, d.h. $a = \pm\frac{1}{2}$. Da $a > 0$ sein muss, ist also nur $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ein Eigenvektor der Fouriertransformation. Der zugehörige Eigenwert λ beträgt $\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{2\pi}$.

(d) Wie in der Vorlesung gesehen (oder von Serie 7): $\mathcal{F}[xf(x)](\xi) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}[f](\xi)$, also ist $xf \in L^1(\mathbb{R})$. Für $f(x) = e^{-ax^2}$ ist bekanntlich $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ und somit

$$\mathcal{F}[xe^{-ax^2}](\xi) = i\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\right] = -\frac{i\xi}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

8.2. Fourier-Transformation II. Wir benutzen die Ableitungregel (siehe Serie 7)

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\mathcal{F}[f](\xi) = (-i)^k \mathcal{F}\left[x^k f(x)\right](\xi),$$

die liefert

$$\int x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[x^k\, f(x)](0) = i^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\mathcal{F}[f](0).$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \mathcal{F}[f](0) = \frac{3}{5},\\ \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x &= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}[f](0) = \frac{3}{25},\\ \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\mathcal{F}[f](0) = \frac{6}{125}.\end{aligned}$$

8.3. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern. Wie bekannt, ist u gegeben durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)K(x-y,t)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

oder äquivalent, durch einen Variablenwechsel $y' = x - y$:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)K(y,t)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

wobei $K(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-\frac{y^2}{4c^2 t}}$ (hier: $c = 1$) der Wärmeleitungskern ist.

(a) Hier benutzen wir (1). Mit $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ gilt:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{(x-y)^2}{4t} + 2y\right)}\,\mathrm{d}y.$$

Das Argument von e (ohne dem Minus) ist:

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + 2y = \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 8yt}{4t} = \frac{y^2 + 2y(4t - x) + x^2}{4t}.$$

Wir wollen quadratisch ergänzen, nämlich:

$$y^2 + 2y(4t - x) + x^2 = (y + (4t - x))^2 - (4t - x)^2 + x^2.$$

Mit diesem Trick erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y+(4t-x))^2-(4t-x)^2+x^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2-(4t-x)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y+(4t-x))^2}{4t}} \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Das Integral können wir mit einem Variablenwechsel bestimmen:

$$z = y - (4t - x),$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y+(4t-x))^2}{4t}} \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} K(z,y) \,\mathrm{d}z = 1$$

Wir schliessen, dass

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2-(4t-x)^2}{4t}} = \mathrm{e}^{4t-2x}.$$

(b) Hier benutzen wir (2). Sei jetzt $f = \cos(x)$. Durch die trigonometrische Formel

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

sehen wir, dass

$$u(x,y) = \cos(x) \int_{\mathbb{R}} \cos(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y + \sin(x) \int_{\mathbb{R}} \sin(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y.$$

Weil $\sin(y)$ *ungerade ist, und* $K(y,t)$ *gerade ist, ist* $\sin(y)K(y,t)$ *ungerade.* Weil das Integral einer ungeraden Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ immer null ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y = 0.$$

Zum ersten Summand: mithilfe der eulerschen Formeln folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \cos(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{iy}}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-iy}}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iy} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

wobei in dem letzten Teil ein Variablenwechsel $y' = -y$ benutzt wurde, um beide Terme gleich zu machen. Dann bemerken wir, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iy} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \, \mathrm{d}y = 2\pi \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \right] (1) = \mathrm{e}^{-tz^2} \bigg|_{z=1} = \mathrm{e}^{-t}.$$

Schlussendlich schliessen wir, dass

$$u(x,t) = \cos(x)\mathrm{e}^{-t}.$$

8.4. Fourier-Trasformation und Graphen (Prüfung August 2017). Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von August 2017 (→ Kurs-Webpage).

Kleine Korrektur: Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x \in (-1,1) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

und undefiniert in den Punkten -1 und 1. (Beachte, dass für alle weiteren Berechnungen, z.B. die Integrale, die zwei Definitionslücken keine Rolle spielen und wir annehmen können, f' sei so, wie auf der Lösung der Prüfung beschrieben.)