9.1. Fourier-Transformation.

(a) Um die Fouriertransformierte von $f(x) = x^2 e^{-2|x|}$ zu berechnen, benutzen wir

$$\mathcal{F}(x^2 g(x))(\xi) = -\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}(g(x))(\xi).$$

Wir berechnen die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-2|x|}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g(x))(\xi) &= \int_0^\infty e^{-(2+i\xi)x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{(2-i\xi)x}dx \\ &= \frac{1}{2+i\xi} + \frac{1}{2-i\xi} \\ &= \frac{4}{4+\xi^2}\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fouriertransformierte von $f(x)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x))(\xi) &= -\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{4}{4+\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\frac{8\xi}{(4+\xi^2)^2} \\ &= \frac{8}{(4+\xi^2)^2} - \frac{8\xi 4\xi}{(4+\xi^2)^3} \\ &= \frac{8(4-3\xi^2)}{(4+\xi^2)^3}\,.\end{aligned}$$

(b) Um die Fouriertransformierte von $f(x) = \sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2}$ zu berechnen benutzen wir die Regeln

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}(f(x))(\xi),$$
$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}(f(x))(\xi/\lambda),$$
$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi - a).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2}\right)(\xi) &= e^{i\xi}\mathcal{F}\left(\sin(2x-1)e^{-(2x)^2}\right)(\xi) \\ &= \frac{1}{2}e^{i\xi}\mathcal{F}\left(\sin(x-1)e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{i\xi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}\left[e^{i(x-1)} - e^{-i(x-1)}e^{-x^2}\right]e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4i}e^{i\xi}\left[\mathcal{F}\left(e^{-i}e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2}-1\right) - \mathcal{F}\left(e^{i}e^{-x^2}\right)\left(\frac{\xi}{2}+1\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4i}e^{i(\xi-1)}e^{-(\xi/2-1)^2/4} - \frac{\sqrt{\pi}}{4<i}e^{i(\xi+1)}e^{-(\xi/2+1)^2/4}\,.\end{aligned}$$

9.2. Anfangswertproblem. Für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,, \\ u(x,0) &= f(x) \quad x \in \mathbb{R} \,, \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad x \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

ist die Lösung durch die Formel von d'Alembert gegeben:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds \,.$$

In unserem Fall ist $c = \sqrt{3}$, $f(x) = \cos x + 7x$ und $g(x) = \mathrm{e}^{2x} + 4$ und die Lösung ist somit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\cos(x+\sqrt{3}t) + 7(x+\sqrt{3}t) + \cos(x-\sqrt{3}t) + 7(x-\sqrt{3}t)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t} \mathrm{e}^{2\xi} + 4\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\cos(x+\sqrt{3}t) + \cos(x-\sqrt{3}t)}{2} + 7x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\xi}}{2} + 4\xi\right]_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t} \\ &= \frac{\cos(x+\sqrt{3}t) + \cos(x-\sqrt{3}t)}{2} + 7x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{3}t} - \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}t}}{2}\right) + 8\sqrt{3}t\right) \\ &= \cos x \cos(\sqrt{3}t) + 7x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{3}}\sinh(2\sqrt{3}t) + 4t. \end{aligned}$$

9.3. Druckwelle. Wir verwenden wieder die Formel von d'Alembert. Hier ist jedoch $c = 5$ und auch f und g müssen gemäss Aufgabenstellung angepasst werden. Die Lösung am Ort $x_0 = 12$ zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$P(12,t) = \frac{1}{2}\left[f(12+5t) + f(12-5t)\right] + \frac{1}{10}\int_{12-5t}^{12+5t} g(s)\, ds \,,$$

wobei

$$f(s) = \begin{cases} 8 & |s| \le 3 \,, \\ 0 & |s| > 3 \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(s) = \begin{cases} 3 & |s| \le 3 \,, \\ 0 & |s| > 3 \,. \end{cases}$$

Wir berechnen

$$\int_{12-5t}^{12+5t} g(s)\, ds = H(12+5t) - H(12-5t) \,,$$

wobei

$$H(s) = \begin{cases} 3s & |s| \leq 3\,, \\ 9 & s > 3\,, \\ -9 & s < -3\,. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass

$$f(12+5t) = 0 \quad \text{und} \quad |f(12-5t)| \leq 8 \quad \forall t > 0$$

und

$$|H(s)| \leq 9 \quad \forall s \in \mathbb{R}\,.$$

Daraus schliessen wir, dass für jedes t gilt

$$\begin{aligned} |P(12,t)| &\leq \frac{1}{2}|f(12-5t)| + \frac{1}{10}\left[|H(12+5t)| + |H(12-5t)|\right] \\ &\leq 4 + \frac{18}{10} = 5.8 < 9. \end{aligned}$$

Somit wird das Gebäude dem Druck standhalten.

9.4. Superpositionsprinzip. Um das Problem auf ein homogenes zu reduzieren, müssen wir eine partikuläre Lösung von

$$v_{tt} - v_{xx} = \cos(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

finden. Aufgrund unserer Erfahrung mit ODE machen wir den Ansatz

$$v(x,t) = (\alpha t + \beta)(\gamma \cos(x+t) + \delta \sin(x+t))$$

wobei α, β, γ and δ Konstanten sind. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t) =& \alpha\Big(-\gamma \sin(x+t) + \delta \cos(x+t)\Big) + (\alpha t + \beta)\Big(-\gamma \cos(x+t) - \delta \sin(x+t)\Big) \\ &+ \alpha\Big(-\gamma \sin(x+t) + \delta \cos(x+t)\Big), \\ v_{xx}(x,t) =& (\alpha t + \beta)\Big(-\gamma \cos(x+t) - \delta \sin(x+t)\Big), \end{aligned}$$

was zu

$$v_{tt} - v_{xx} = 2\alpha\Big(\gamma \sin(x+t) + \delta \cos(x+t)\Big) \overset{!}{=} \cos(x+t)$$

führt. Daraus schliessen wir, dass $\alpha = 1/2$, $\gamma = 0$ und $\delta = 1$. β ist beliebig, da wir aber nur eine einzelne partikuläre Lösung brauchen, setzen wir $\beta = 0$. (Beachte, dass wenn wir β anders wählen würden, sich dann weiter unten die Anfangswerte von w ändern und wir damit ganz am Ende wieder auf die gleiche Lösung für u kommen würden.) Alles in allem:

$$v(x,t) = \frac{1}{2} t \sin(x+t).$$

Wir definieren $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ und bemerken, dass w folgendes Problem löst:

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0 && x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ w(x,0) &= x && x \in \mathbb{R}\,, \\ w_t(x,0) &= \tfrac{1}{2}\sin(x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Mit der Formel von d'Alembert folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[(x-t) + (x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{2}\sin(s)\,ds \\ &= x + \frac{1}{4}\left[\cos(x-t) - \cos(x+t)\right]\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung u des ursprünglichen Problems gegeben durch

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \frac{1}{2} t \sin(t+x) + x + \frac{1}{4}\left[\cos(x-t) - \cos(x+t)\right]\,.$$