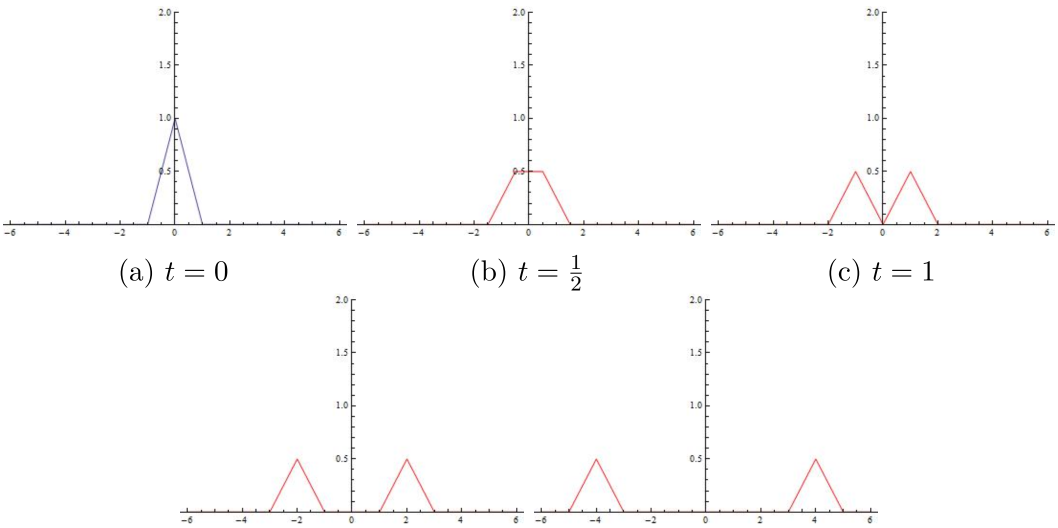
10.1. Gezupfte Saite.

(a) Die d'Alembertsche Formel liefert, dass

$$u(x,t) = \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} = \begin{cases} \frac{2-|x+t|+|x-t|}{2}, & |x+t|<1, |x-t|<1, \\ \frac{1-|x+t|}{2}, & |x+t|<1, |x-t|\geq 1, \\ \frac{1-|x-t|}{2}, & |x+t|\geq 1, |x-t|<1. \end{cases}$$

gilt. Was man aber eigentlich sieht, sind zwei Zacken (jeweils halb so groß wie der durch g gegebene Zacken zu Beginn), von denen sich einer mit Geschwindigkeit 1 nach rechts und der andere mit Geschwindigkeit 1 nach links bewegt. Bis zur Zeit $t = 1$ interferieren sie noch, danach sind sie räumlich getrennt.

(b) Man findet:



(a) $t = 0$ (b) $t = \frac{1}{2}$ (c) $t = 1$

(d) $t = 2$ (e) $t = 4$

10.2. Fast eine Wellengleichung Die Problem für u impliziert, dass $z(x,t) = w_x(x,t)$ eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} z_{tt} - z_{xx} &= t^2 && x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ z(x,0) &= 0 && x \in \mathbb{R} \\ z_t(x,0) &= \sin(x) && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ist, das ein gewöhnliches Anfangswertproblem für die Wellengleichung ist. Es ist möglich, die (allgemeinste) Formel von d'Alembert direkt anzuwenden, aber hier wollen wir noch einmal das Superpositionsprinzip darstellen. Eine partikuläre Lösung der PDE ist offensichtlich

$$v(x,t) = \frac{1}{12}t^4.$$

Daraus folgt, dass $w(x,t) = z(z,t) - v(z,t)$

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0 && x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x,0) &= 0 && x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) &= \sin(x) && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

löst. Mittels der Formel von d'Alembert können wir w bestimmen:

$$w(z,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin(s)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\Big(\cos(x+t) - \cos(x-t)\Big).$$

Es folgt, dass

$$z(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = -\frac{1}{2}\Big(\cos(x+t) - \cos(x-t)\Big) + \frac{1}{12}t^4.$$

Schliesslich folgt, da $z(x,t) = w_x(x,t)$, dass die allgemeine Lösung unseres Problems gegeben ist durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^x z(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi + u(0,t) \\ &= \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\Big(\cos(x+t) - \cos(x-t)\Big) + \frac{1}{12}t^4\right)\,\mathrm{d}\xi + \underbrace{u(0,t)}_{=:C(t)} \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\sin(x+t) - \sin(x-t)\Big) + \frac{1}{12}t^4 x + C(t), \end{aligned}$$

wobei $C \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine *beliebige* Funktion ist.