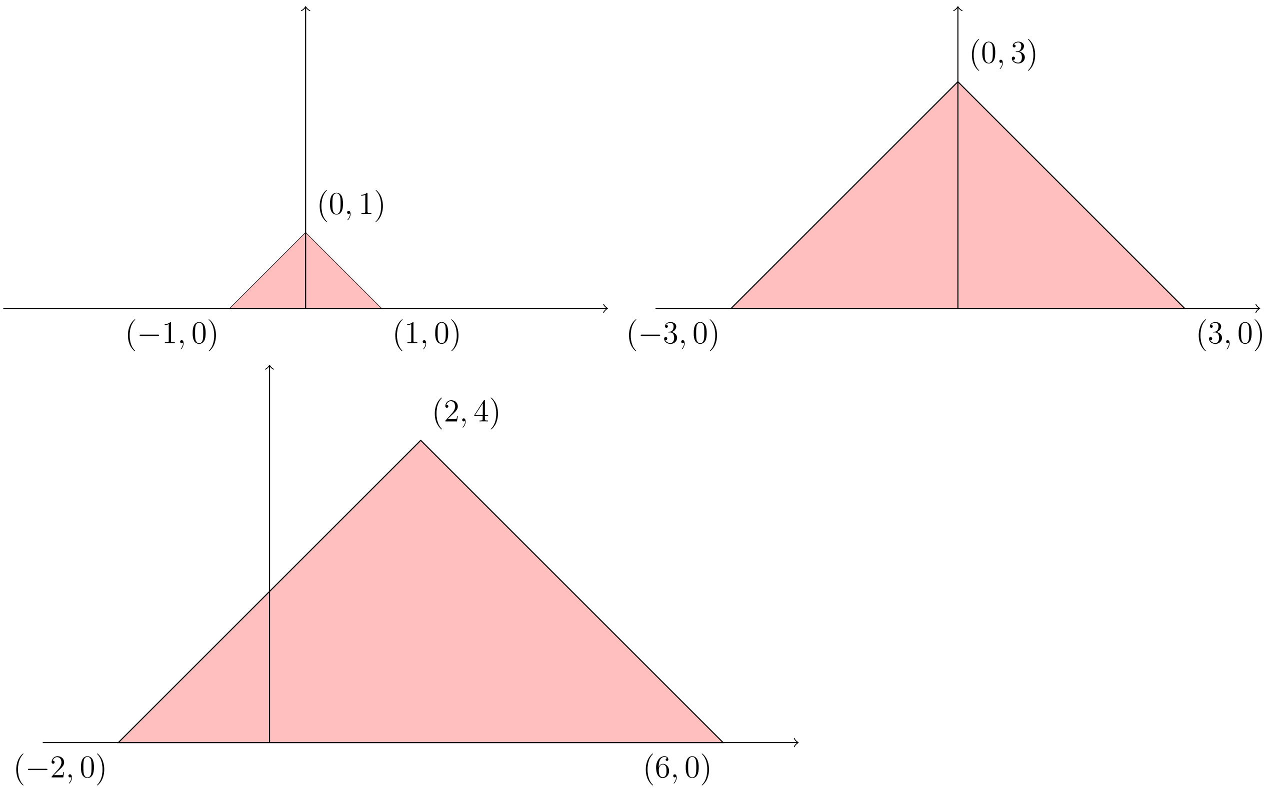
11.1. Abhängigkeitsgebiet.

(a) Im Folgenden wird das charakteristische Dreieck berechnet. Das Abhängigkeitsgebiet ist jeweils der Schnitt mit der x-Achse.

Das charakteristische Dreieck $\Delta = \Delta(c, x, t)$ hat die Ecken

$$(x - ct, 0), \quad (x, t), \quad (x + ct, 0).$$

Somit haben die Dreiecke in unserem Fall $c = 1$ die folgende Gestalt:



(b) *Variante 1:* Wir suchen zuerst eine partikuläre Lösung v. Der Ansatz $v(x,t) = v_1(t) + v_2(x)$ scheint aufgrund der Struktur der rechten Seite Sinn zu machen. Da wir nur eine einzige partikuläre Lösung suchen, trennen wir die darauf entstandene Gleichung auf und suchen Lösungen von:

$$\begin{aligned} v_{1,tt} &= e^{-t} & &\Rightarrow v_1(t) = e^{-t} \\ -v_{2,xx} &= \cos(x+2) & &\Rightarrow v_2(x) = \cos(x+2) \end{aligned}$$

und damit ist $v = e^{-t} + \cos(x+2)$ eine partikuläre Lösung.

Setzen wir nun $w = u - v$, so erfüllt w die Gleichung

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x,0) = x^2 - 1 - \cos(x+2) & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) = x + 1 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Hierauf wenden wir nun d'Alembert an und kriegen:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds \\ &= \frac{(x+t)^2 - 1 - \cos(x+t+2) + (x-t)^2 - 1 - \cos(x-t+2)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s + 1\,ds \\ &= \ldots = x^2 + t^2 + xt + t - 1 - \frac{\cos(x+t+2) + \cos(x-t+2)}{2}. \end{aligned}$$

Die Schlusslösung ist dann gegeben durch

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = x^2 + tx + t^2 + t + \mathrm{e}^{-t} - 1 - \cos(x+2)(\cos t - 1)$$

Variante 2: Wir benutzen die allgemeine Formel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int_{\Delta} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

wobei Δ das Dreieck mit den Ecken (x,t), $(x-ct,0)$ und $(x+ct,0)$ bezeichnet. In unserem Fall ist $c = 1$, $f(s) = s^2$, $g(s) = s$ und $F(x,t) = \mathrm{e}^{-t} + \cos(x+2)$. Damit folgt

$$u(x,t) = x^2 + t^2 + tx + \frac{1}{2}\int_{\Delta} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Da gilt:

$$(\xi,\tau) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \tau \leq t, \\ x - (t-\tau) \leq \xi \leq x + (t-\tau), \end{cases}$$

können wir auf folgende Weise das Doppelintegral bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \mathrm{e}^{-\tau} + \cos(\xi+2)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t 2(\mathrm{e}^{-\tau}(t-\tau) + 2\cos(2+x)\sin(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= 2(t + \mathrm{e}^{-t} - 1 - \cos(x+2)(\cos t - 1)). \end{aligned}$$

Schlussendlich ist die Lösung

$$u(x,t) = x^2 + tx + t^2 + t + \mathrm{e}^{-t} - 1 - \cos(x+2)(\cos t - 1)\,.$$

11.2. Einflussgebiet.

Gemäss der d'Alembertschen Formel gilt

$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\; ds$$

für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ mit $x-t \geq 2$ ist nun aber $x+t \geq x-t \geq 2$, d.h. f und g sind auf dem Intervall $[x-t, x+t]$ Null. Damit berechnet sich $u(x,t)$ für solche (x,t) zu Null. Für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ mit $x \leq -t-2$ gilt $x-t \leq x+t \leq -2$ und damit sind f und g auf dem Intervall $[x-t, x+t]$ wieder identisch Null und $u(x,t) = 0$.

11.3. Fouriertransformation.

(a) Wir berechnen die Faltung zuerst an einer Stelle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|t-s|+|s|)}\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-t+2s}\, ds + \int_{0}^{t} e^{-t}\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{t+2s}\, ds \\ &= (t+1)e^{-t},\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt unterteilt haben, ob $t-s > 0$ oder $t-s < 0$, respektive $s > 0$ oder $s < 0$.

Für $t < 0$ verläuft die Rechnung symmetrisch, d.h. wir kriegen am Ende

$$(f * f)(t) = (|t|+1)e^{-|t|}.$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|t|+i\xi t)}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\xi)}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{t(-1-i\xi)}\, dt \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

(c) Wir nutzen die Additivität der Fouriertransformation und die Multiplikationseigenschaft, um die Aufgabe zurückzuführen auf die ersten beiden Teilaufgaben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[|t|\, e^{-|t|}](\xi) &= \mathcal{F}[(|t|+1)e^{-|t|}](\xi) - \mathcal{F}[e^{-|t|}](\xi) \\
&= \mathcal{F}[f * f](\xi) - \mathcal{F}[f](\xi) \\
&= (\hat{f}(\xi))^2 - \hat{f}(\xi) \\
&= \frac{2(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^2}.
\end{aligned}$$