12.1. Laplacegleichung auf der Halbebene. Die allgemeine Lösungsformel für solche Probleme auf der Halbebene mit rechter Seite f lautet

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \left(\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right) * f \\ &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}\,d\tau. \end{aligned}$$

Beachte, dass die Faltung in der x-Variable ist.

Hier ergibt sich also:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_{[-1,1]}(\tau)}{(x-\tau)^2+y^2}\,d\tau \\ &= \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-\tau)^2+y^2}\,d\tau \\ &\overset{t=\tau-x}{=} \frac{y}{\pi}\int_{-1-x}^{1-x} \frac{1}{t^2+y^2}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{y}\right)\Big|_{t=-1-x}^{t=1-x} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{1+x}{y}\right)\right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \begin{cases} 0 & x \notin [-1,1] \\ 1 & x \in (-1,1) \\ \frac{1}{2} & x \in \{-1,1\} \end{cases}$$

Dies ist in Ordnung, denn „als L^1-Funktion“ ist dies dasselbe wie die vorgeschriebenen Anfangswerte. (Nur wenn die Randwerte stetig oder besser sind, können wir erwarten, dass unsere Lösung die Randwerte an jedem einzelnen Punkt erfüllt.)

12.2. Duhamels Prinzip. Die Formel von d'Alembert mit Duhamels Prinzip lautet

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+(t-c\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

wobei in diesem Fall $F(x,t) = f(x) = g(x) = x^2$ und $c = 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} &= \frac{1}{2}\left((x+t)^2 + (x-t)^2\right) = x^2 + t^2, \\
\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s^2\,ds \\
&= \frac{1}{6}\left((x+t)^3 - (x-t)^3\right) \\
&= x^2 t + \frac{t^3}{3}, \\
\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi^2\,d\xi d\tau \\
&= \int_0^t \left(x^2\tau + \frac{\tau^3}{3}\right) d\tau \\
&= \frac{x^2t^2}{2} + \frac{t^4}{12}.
\end{aligned}$$

Die Lösung ist damit

$$u(x,t) = x^2 + t^2 + x^2 t + \frac{t^3}{3} + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{t^4}{12}.$$

12.3. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten Schritt (a): wir benützen die Relationen

$$\begin{cases} x = x(r,\phi) = r\cos(\phi) \\ y = x(r,\phi) = r\sin(\phi) \end{cases}$$

um zu berechnen, dass

$$\begin{aligned}
u_1(r,\phi) &= r^2 \\
u_2(r,\phi) &= r\cos\phi + r\sin\phi + r^2\sin^2\phi \\
u_3(r,\phi) &= \frac{1}{\tan\phi} = \cot\phi.
\end{aligned}$$

Jetzt muss nur Schritt (c) bearbeiten werden. Wir benützen zweimal die Relation:

$$\partial_x u = \cos\phi(\partial_r u) - \frac{1}{r}\sin\phi(\partial_\phi u)$$

um zu finden:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{xx} u &= \partial_x \left(\cos\phi \partial_r u - \frac{1}{r} \sin\phi \partial_\phi u \right) \\
&= \cos\phi \; \partial_r \left(\cos\phi \partial_r u - \frac{1}{r} \sin\phi \partial_\phi u \right) - \frac{1}{r} \sin\phi \; \partial_\phi \left(\cos\phi \partial_r u - \frac{1}{r} \sin\phi \partial_\phi u \right) \\
&= \cos^2\phi \partial^2_{rr} u - \partial_r \left(\frac{1}{r} \cos\phi \sin\phi \partial_\phi u \right) + \frac{1}{r} \sin^2\phi \partial_r u - \frac{1}{r^2} \sin\phi \cos\phi \partial^2_{r\phi} u \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \sin\phi \cos\phi \partial_\phi u + \frac{1}{r^2} \sin^2\phi \partial^2_{\phi\phi} u.
\end{aligned}$$

Analog für y:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{yy} u &= \sin^2\phi \partial^2_{rr} u + \partial_r \left(\frac{1}{r} \cos\phi \sin\phi \partial_\phi u \right) + \frac{1}{r} \cos^2\phi \partial_r u \\
&\quad \frac{1}{r} \cos\phi \sin\phi \partial^2_{r\phi} u - \frac{1}{r^2} \cos\phi \sin\phi \partial_\phi u + \frac{1}{r^2} \cos^2\phi \partial^2_{\phi\phi} u.
\end{aligned}$$