12.1. Berechnung von Δ

(a) Wir berechnen

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(x_1^2 + x_2^2) = 2 + 2 = 4.$$

(b) Mithilfe der Kettenregel folgt:

$$\Delta(e^{r^2}) = 2e^{r^2} + 4r^2 e^{r^2} + 2e^{r^2} = 4e^{r^2}(1 + r^2)\,.$$

(c) Wir bemerken, dass $f(r,\phi) = \cos^2(\phi)$: es folgt, dass f unabhängig von r ist. Wir berechnen dann

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} f_{\phi\phi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}(-2\cos\phi\sin\phi) = \frac{2}{r^2}(\sin^2\phi - \cos^2\phi).$$

12.2. Laplace-Gleichung auf den Kreis

(a) Zuerst betrachten wir das Problem in Polarkoordinaten. Daraus folgt

$$\begin{cases} \Delta u(r,\phi) = r^4 & (r,\phi) \in [0,1) \times [-\pi,\pi) \\ u(1,\phi) = 0 & \phi \in [-\pi,\pi). \end{cases}$$

Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}.$$

Wir wissen, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat. Weil r^4 nicht von ϕ abhängt, versuchen wir den Ansatz $u(r,\phi) = u(r)$, um diese eindeutige Lösung zu finden. Das Problem wird dann

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = r^4 & (r,\phi) \in [0,1) \times [-\pi,\pi) \\ u(1,\phi) = 0 & \phi \in [-\pi,\pi). \end{cases}$$

Wir bemerken, dass

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = r^4 \quad\Rightarrow\quad r u_{rr} + u_r = r^5 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r u_r) = r^5,$$

also

$$r u_r = \frac{r^6}{6} + C \quad\Rightarrow\quad u_r = \frac{r^5}{6} + \frac{C}{r} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{r^6}{36} + C\log r + D.$$

Die Randbedingung liefert

$$u(1) = \frac{1}{36} + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{36}.$$

Da die Lösung differenzierbar sein soll, muss insbesondere $\lim_{r\to 0} u(r)$ ein begrenzter Wert sein: Das ist möglich, nur wenn $C = 0$. Daraus schliessen wir, dass die Lösung die Form

$$u(r) = \frac{r^6}{36} - \frac{1}{36}, \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^3}{36} - \frac{1}{36}$$

hat.

(b) Wie aus der Vorlesung bekannt, falls wir die Randwerte $u(1,\phi)$ als Fourierreihe schreiben können:

$$u(1,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)$$

dann ist die Lösung gegeben durch

$$u(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)).$$

In unserem Fall, sehen wir, dass mithilfe trigonometrischer Formeln

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \tag{1}$$

in Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} u(1,\phi) = y + x^2 &= \sin(\phi) + (\cos(\phi))^2 \\ &= \sin(\phi) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\phi), \end{aligned}$$

daraus schliessen wir, dass die Lösung des Problems (in Polarkoordinaten)

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + \frac{r^2}{2}\cos(2\phi)$$

ist. Um die Lösung in kartesischen Koordinaten zu schreiben, benutzen wir einmal mehr Formel (1):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + \frac{r^2}{2}\cos(2\phi) \\ &= \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + \frac{r^2}{2}(2\cos^2(\phi) - 1) \\ &= \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + (r\cos(\phi))^2 - \frac{r^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + y + x^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{2} + y + \frac{x^2-y^2}{2}. \end{aligned}$$

(c) Wie in der Vorlesung gezeigt, hat die Lösung in Polarkoordinaten die Form

$$u(r,\phi) = a_0 + \sum_{n\geq 1} r^n \left[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)\right] ,$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(n\phi)d\phi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin(n\phi)d\phi. \end{aligned}$$

Mithilfe der trigonometrischen Identität

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos(3\alpha)}{4}$$

sehen wir, dass

$$f(\phi) = 4\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi) = \cos(3\phi).$$

Deshalb verschwinden alle Koeffizienten ausser $a_3 = 1$. Mithilfe der trigonometrischen Identität

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha),$$

erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) = r^3\cos(3\phi) = r^3(\cos^3(\phi) - 3\sin^2(\phi)\cos(\phi))$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 .$$