14.1. Laplace-Gleichung auf dem Rechteck I.

(a) Wir machen den Separationansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Die PDE wird dann

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} =: \lambda$$

mit den Randbedingungen $Y(0) = 0 = Y(1)$ und $X(0) = 0$. Das Y-Problem

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(1) = 0 \end{cases}$$

besitzt nur für $\lambda = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ nichttriviale Lösungen. Sie haben die Form

$$Y_n(y) = A_n \sin(\pi n y), \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

Somit hat das X-Problem für jedes $\lambda = (\pi n)^2$,

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

die Lösung

$$X_n(x) = B_n \mathrm{e}^{\pi n x} - B_n \mathrm{e}^{-\pi n x} = C_n \sinh(\pi n x), \quad C_n \in \mathbb{R}.$$

Der Lösungsansatz des gesamten Problems ergibt sich durch lineare Superposition der Basislösungen, also

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\pi n y) \sinh(\pi n x).$$

Die Konstanten D_n werden durch die inhomogene Randbedingung bestimmt. Es soll gelten

$$u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh(\pi n) \sin(n\pi y) = -\sin(2\pi y)\cos(2\pi y).$$

Weil $-\sin(2\pi y)\cos(2\pi y)$ gleich $\frac{-\sin(4\pi y)}{2}$ ist, erhalten wir mit Koeffizientenvergleich die Lösung

$$u(x,y) = -\frac{\sin(4\pi y)\sinh(4\pi x)}{2\sinh(4\pi)}.$$

(b) Mit dem Separationansatz $u(x) \overset{!}{=} X(x)Y(y)$ finden wir die Bedingungen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{konst.} = \lambda,$$
$$X(x)Y(0) = x(x-1),$$
$$X(x)Y(1) = 0 \Longrightarrow Y(1) = 0,$$
$$X(0)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0,$$
$$X(1)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(1) = 0.$$

Das Problem

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(1) = 0, \end{cases}$$

besitzt nur für $\lambda = -\pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, von Null verschiedene Lösungen und diese haben dann die Form

$$X(x) = X_k(x) = A_k \sin(k\pi x) \quad x \in [0,1],\ A_k \text{ beliebig.}$$

Die Lösungen des Problems

$$\begin{cases} Y''(y) - \pi^2 k^2 Y(y) = 0, \\ Y(1) = 0, \end{cases}$$

sind $Y(y) = Y_k(y) = B_k \mathrm{e}^{-\pi k y}(1 + \mathrm{e}^{2\pi k y})$, B_k beliebig. Aus dem Superpositionsprinzip hat u den Ausdruck:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mathrm{e}^{-\pi k y}(1 + \mathrm{e}^{2\pi k y}) \sin(\pi k x).$$

Um die Koeffizienten C_k zu bestimmen, beachten wir, dass

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2C_k \sin(k\pi x) \overset{!}{=} x(1-x)$$

somit

$$2C_k = \int_0^1 x(1-x)\sin(\pi k x)\,\mathrm{d}x = \frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3};$$

also ist u gegeben durch

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3} \mathrm{e}^{-\pi k y}(1 + \mathrm{e}^{2\pi k y}) \sin(\pi k x).$$

14.2. Laplace-Gleichung auf dem Rechteck II (Prüfung Februar 2012).
Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von Februar 2012 (→ Kurs-Webpage).