2.1. Klassifikation von PDEs I. Seien a, b, f und g differenzierbare Funktionen. Entscheide, ob die folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ homogen linear, inhomogen linear oder nicht linear sind und bestimme die Ordnung. Im FallE einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung: Entscheide, ob die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $u_{xxx} + u_y = f$,

(b) $au_{xx} + bu^2 = 0$,

(c) $u_x u_y = 0$,

(d) $2u_{xx} + u_x + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$,

(e) $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

2.2. Klassifikation von PDEs II (Prüfung 9. August 2017, korrigiert).

Seien a, b und g differenzierbare Funktionen mit $g > 0$.

Entscheide, ob die folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ linear oder nichtlinear sind und bestimme die Ordnung; falls linear, entscheide, ob sie homogen oder nicht homogen sind. Im Falle einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung: Entscheide, ob die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $au_{xxx} + b(u^4 + u) = 0$,

(b) $a^2 u_{xx} + u_x u_y = 1$,

(c) $4u_{xx} + u_x + u_{xy} + 6u_{yy} = 0$,

(d) $(x^2 - 2)u_{xx} + 4xyu_{xy} + (y^2 - 2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 16\}$.

2.3. Lösungskandidaten.

(a) Wende den Laplace-Operator ($\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$) auf die folgende Funktion an:

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Für welche Werte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist u eine Lösung der PDE $\Delta u = \alpha u^\beta$?

(b) Seien $c, k \in \mathbb{R}$, mit $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(t, x) = f(t) \sin(kx).$$

Berechne $u_{tt} - c^2 u_{xx}$. Für welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$?