

3.1. Wellengleichung und Superpositionsprinzip. (korrigiert) Finde eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - 4u_{xx} = \sin^2(t) + \tan^2(x)$$

mit Hilfe des Superpositionsprinzip.

Hinweis: Es ist nicht nötig, die allgemeine Lösung zu finden, eine einzige Lösung reicht.

3.2. Variablenwechsel. Führe den angegebenen Variablenwechsel in den folgenden PDEs durch.

(a) $u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$

$$\text{Variablenwechsel} \begin{cases} s = x + y, \\ t = 2x. \end{cases}$$

(b) $u_{xx} - 2 \sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0,$

$$\text{Variablenwechsel} \begin{cases} s = \cos(x) + x - y, \\ t = \cos(x) - x - y. \end{cases}$$

(c) Finde die allgemeine Lösung u in (b).

Die folgenden Aufgaben sind als weitere Möglichkeit, ODEs zu wiederholen und üben, gedacht.

3.3. Separation der Variablen. Löse die folgenden ODEs:

(a) $xy'(x) = y(x) + x^2,$

(b) $y'(x) = e^y \sin(x),$

(c) $y'(x) = \frac{y}{1-x^2}.$

Hinweis: Teil (a) benötigt entweder eine Substitution oder man löst zuerst die Gleichung $xy' = y$ und macht dann einen Ansatz für den Rest.

3.4. Anfangswertprobleme. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' + 2y = x^2, \quad y(0) = -2$

(b) $y' + y = 2 \sin(x), \quad y(0) = \pi$

3.5. Logistische Gleichung. Bestimme die Lösungen der logistischen Gleichung

$$y'(t) = ay(t) - by(t)^2, \quad y(0) = y_0$$

für positiven Konstante $a, b > 0$ und positive Anfangsbedingungen $y_0 > 0$. Wie verhält sich die Lösung $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$?