4.1. Orthonormale Funktionen. Definiere die Funktionen

$$e_n(x) = \cos\frac{2n\pi x}{T} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$f_n(x) = \sin\frac{2n\pi x}{T} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und zeige, dass diese orthonormal sind bezüglich dem Skalarprodukt

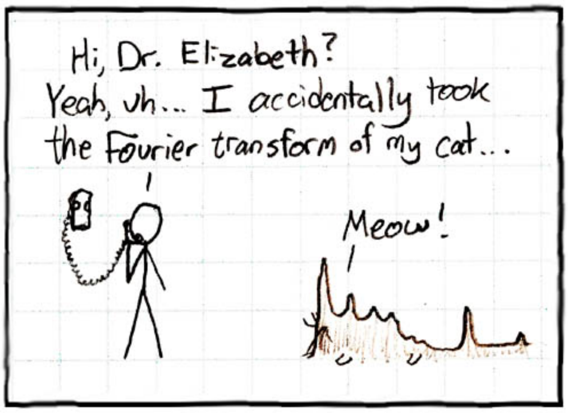
$$e \cdot f = \frac{2}{T}\int_a^b e(x)f(x)\,dx \quad (T = b - a).$$

Zeige also folgendes:

$$e_m \cdot e_n = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$
$$f_m \cdot f_n = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$
$$e_m \cdot f_n = 0.$$

Hinweis: Es gelten die folgenden Indentitäten:

$$\cos(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2}\Big(\cos((A+B)x) + \cos((A-B)x)\Big),$$
$$\sin(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\Big(\cos((A-B)x) - \cos((A+B)x)\Big),$$
$$\cos(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\Big(\sin((A+B)x) - \sin((A-B)x)\Big).$$



https://xkcd.com/26/

4.2. Periodische Funktionen. Bestimme, welche der folgenden Funktionen periodisch sind, und berechne die Periode (falls möglich):

(a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$,

(b) $\tan(\sin(x))$,

(c) $\sin^2(x) - \cos^2(x)$,

(d) $\sin(x) + \frac{x^2}{2}\cos(x)$,

(e) $\sin(2x)\cos(2x)$.

4.3. Reelle Fourier-Reihen(korrigiert). Berechne die reelle Fourier-Reihen der periodischen Fortsetzung der folgenden Funktionen:

a) 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

b) 2-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-1, 1].$$

4.4. Fourier-Reihen und numerische Reihen (Prüfung Februar 2012). Sei $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Berechne die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f.

(b) Berechne (mithilfe von (a)) den Wert der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}.$$

4.5. Integration periodischer Funktionen. Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine T periodische Funktion. Zeige, dass für alle $A \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^T f(x)dx = \int_A^{A+T} f(x)dx.$$