5.1. Gerade und ungerade Fortsetzung. Sei $f(x) = x$ definiert auf $[0, \pi]$.

(a) Skizziere die folgenden Funktionen und berechne ihre Fourier Reihen.

i) f_1 ist die gerade 2π periodische Fortsetzung von f,

ii) f_2 ist die ungerade 2π periodische Fortsetzung von f,

iii) $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$,

iv) f_4 ist die π periodische Fortsetzung von f.

(b) Zeige mit Hilfe von a) die Gleichheit

$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5.2. Reelle und komplexe Fourier-Reihe. Sei

$$f(x) = e^x \quad \text{für} \quad x \in (0, \pi)\,.$$

Finde die komplexen und reellen Fourier-Reihen der geraden respektive ungeraden 2π periodischen Fortsetzungen von $f(x)$.

5.3. Fragen zur Fourierreihendarstellung.

(a) Kann die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 9\cos x$$

durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden?

(b) Betrachte die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3.$$

Ist es möglich, dass die 2π-periodische Fortsetzung durch eine endliche Fourier-Reihe dargestellt wird?

5.4. Reelle und komplexe Fourier-Reihe II. Gegeben sei

$$f(x) = \cosh^2(x) \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1)\,.$$

(a) Finde die komplexe Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Finde die reelle Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

Erinnerung: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

5.5. Reelle und komplexe Fourier-Reihe III. Gegeben sei

$$f(x) = |\sin(x)| \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi).$$

(a) Finde die komplexe Fourier-Reihe der periodischen Fortsetzung von f.

(b) Finde die reelle Fourier-Reihe der periodischen Fortsetzung von f.