6.1. Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Anfangsbedingungen. Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin^3(3\pi x) + 4\sin(4\pi x)\cos(4\pi x) & x \in [0,1]. \end{cases}$$

6.2. Wärmeleitungsgleichung mit Neumannrandbedingungen (korrigiert).

(a) Berechne die Fourierreihe der π-periodischen Fortsetzung von $\sin(x)$. Konvergiert diese Fourierreihe gegen $\sin(x)$ in $[0,\pi]$? Begründe deine Antwort.

(b) Löse das folgende Anfangs- und Randwertproblem (mit homogenen Neumannrandbedingungen) mit der Methode der Separation der Variablen:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(c) Das PDE-Modell in (b) beschreibt die Wärmeausbreitung in einem sehr dünnen isolierten Stab. Berechne die Grösse

$$U(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

die man als mittlere Temperatur des Stabs zur Zeit t interpretieren kann. Was kann man schliessen?

6.3. Fourier-Reihen und numerische Reihen (Prüfung August 2017). Hier nennen wir $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixiert; betrachte die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_\alpha(x) = \cos(\alpha x) \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

(a) Nehme für diese, *und nur für diese*, Teilaufgabe an, dass $\alpha = \frac{1}{\pi}$. Skizziere den Graph von f_α.

(b) Bestimme die komplexe und die reelle Fourier-Reihe von f_α. Konvergieren diese Reihen gegen die 2π-periodische Fortsetzung von f_α? Begründe deine Antwort.

(c) Mithilfe der folgenden elementaren Identitäten:

$$\cosh(x) = \cos(ix), \qquad \sinh(x) = \frac{\sin(ix)}{i},$$

bestimme den Wert von:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Hinweis für (c): Betrachte die reelle Fourier-Reihe von $f_\alpha(x)$ für geeignete $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

6.4. Fourier-Reihe (Prüfung Januar 2017). Sei $f(x) = x^2/2$ für $x \in [0, 2]$.

(a) Berechne die reelle und komplexe Fourier-Reihe der geraden 4-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Berechne mithilfe von (a) den Grenzwert von

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^2}.$$