**7.1. Inhomogene Dirichletrandbedingungen.** Löse das folgende inhomogene Problem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = 1 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(1,t) = 2 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x + \cos^2(\pi x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

**7.2. Wärmeleitungsgleichung in einem Ring.** Betrachte einen wärmeisolierten, dünnen, blechernen Ring mit Radius 1, der durch den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ modelliert wird. Zur Anfangszeit $t = 0$ ist die Temperatur des Kreises proportional (mit Proportionalitätskonstante 1) zu der Distanz von der Stelle 1:

$$u_0(x) = \operatorname{dist}_{S^1}(x, 1) \quad \text{für jedes } x \in S^1.$$

**(a)** Finde für jede Stelle $x$ und jeden Zeitpunkt $t$ den Ausdruck $u(x,t)$ für die Temperatur des Kreises. *Gehe folgendermassen vor:*

- Jede Stelle $x \in S^1$ kann als $x = \mathrm{e}^{i\theta} \simeq (\cos\theta, \sin\theta)$ für $\theta \in [0, 2\pi]$ geschrieben werden. Somit arbeiten wir mit der Bogenmass-Koordinate $\theta \in [0, 2\pi]$. Überprüfe, dass $u_0$ in der Bogenmass-Koordinate durch

$$u_0(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{falls } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 2\pi - \theta & \text{falls } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

  gegeben ist.

- Finde den Ausdruck für $u(\theta, t)$ durch die Lösung des Problems:

$$u_t - u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{für } (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+,$$

  mit Anfangsbedingung wie oben.

**(b)** Nehme jetzt an, dass der Ring nicht isoliert ist und die Energiestromdichte der Wärmestrahlung des Ringes proportional zur Zeit (mit Proportionalitätskonstante 2) ist. In anderen Worten, es gilt:

$$u_t - u_{\theta\theta} = -2t \quad \text{für } (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+.$$

mit Anfangsbedingung wie in (a). Finde den Ausdruck für $u(\theta, t)$.

**7.3. Eigenschaften der Fourier-Transformation.** Wir wollen hier einige wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation beweisen. Seien $f, g$ Funktionen in $L^1(\mathbb{R})$. [1] Die Fouriertransformation von $f$ wird mit $\mathcal{F}[f]$ oder $\hat{f}$ bezeichnet,

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$

**(a) Linearität.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\mathcal{F}[af + bg](\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi).$$

**(b) Ableitung.** Sei $f$ so dass $f'$ und $x\,f(x)$ auch in $L^1(\mathbb{R})$ sind. Beweise, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f}(\xi) = (-i)\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right](\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

**(c) Höhere Ableitung.** Sei jetzt $k \in \mathbb{N}_{>1}$ und $f$ so dass $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ und $xf(x), x^2f(x), \ldots, x^kf(x)$ auch in $L^1(\mathbb{R})$ sind. Beweise, dass

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\hat{f}(\xi) = (-i)^k\mathcal{F}\left[x^kf(x)\right](\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^kf}{\mathrm{d}x^k}\right](\xi) = (i\xi)^k\hat{f}(\xi).$$

**(d) Translation/Modulation.** Sei $a \in \mathbb{R}$ und bezeichne $\tau_af(t) = f(t-a)$. Beweise, dass

$$\mathcal{F}[\tau_af](\xi) = \mathrm{e}^{-i\xi a}\hat{f}(\xi),$$

$$\tau_a\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[\mathrm{e}^{iax}f(x)](\xi).$$

**(e) Faltung/Multiplikation.** Sei $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$ die Faltung. Beweise, dass

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$

$$\mathcal{F}[fg](\xi) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi).$$

[1] Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gehört zu $L^1(\mathbb{R})$ wenn $\int_{\mathbb{R}} |h| < +\infty$.

**(f) Zweimalige Transformation.** Zeige, dass, wenn man die Fouriertransformation zweimal anwendet, dann gilt

$$\mathcal{F}[\hat{f}](y) = 2\pi f(-y).$$

**(g) Integral.** Sei $\varphi(x) = \int_a^x f(y)\,dy$, $a \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\hat{f}(\xi).$$

**(h) Streckung.** Sei $\lambda > 0$. Bezeichne $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ und $\delta_{1/\lambda} f(x) = f(x/\lambda)$. Beweise, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_\lambda f](\xi) &= \frac{1}{\lambda}\delta_{1/\lambda}\hat{f}(\xi), \\ \delta_\lambda \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left[\delta_{1/\lambda} f(x)\right](\xi). \end{aligned}$$

*Hinweis zu (b):* Benutze partielle Integration und die Tatsache dass, wenn $h$ in $L^1(\mathbb{R})$ ist, $\lim_{R\to\pm\infty} h(R) = 0$ gilt.

**7.4. Berechnung der Fourier-Transformation.** Sei $a \neq 0$ gegeben. Berechne die Fourier-Transformierten der Funktionen

$$g(t) = \mathrm{e}^{-a|t|} \quad \text{und} \quad h(t) = \operatorname{sign}(t)\mathrm{e}^{-a|t|},$$

wobei $\operatorname{sign}(t)$ die Signumsfunktion ist:

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0 \\ -1 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$