Wir erinnern uns an das Gaussintegral:

$$\sqrt{\pi} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

8.1. Fourier-Transformation I.

(a) Zeige, dass für $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](-\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

(b) Zeige, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\right](\xi) = 2\pi e^{-a\xi^2}$$

gilt, wobei $a > 0$ eine positive Konstante ist.

(c) Für welche Wahl von $a > 0$ ist $e^{-a\xi^2}$ ein Eigenvektor für die Fouriertransformation, d.h. es gibt eine reelle Konstante λ, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \lambda e^{-a\xi^2}?$$

(d) Berechne die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^{-ax^2}$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist, unter Verwendung der Fouriertransformierten von $g(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$.

Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$.

8.2. Fourier-Transformation II. Sei f eine unbekannte Funktion welche die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{3}{5 + i\xi} \tag{1}$$

besitzt. Bestimme die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Man kann diese Integrale bestimmen, ohne f zu berechnen.

8.3. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern (korrigiert). Löse das folgende Problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

für die Fälle

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$,

(b) $f(x) = \cos(x)$.

8.4. Fourier-Transformation und Graphen (Prüfung August 2017). Betrachte die Funktion $f(x) = (1 - |x|^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, wobei:

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne die Ableitung f' (welche ausserhalb der Punkte -1 und 1 definiert ist) und zeichne die Graphen von f und f'.

(b) Berechne $\mathcal{F}[f']$.

(c) Berechne $\mathcal{F}[f]$ *mithilfe von* (b).