9.1. Fourier-Transformation. Berechne die Fouriertransformation der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = x^2 e^{-2|x|}$

(b) $f(x) = \sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2}$

9.2. Anfangswertproblem. Löse das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xx} = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \cos x + 7x & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \mathrm{e}^{2x} + 4 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

9.3. Druckwelle. Eine Druckwelle, verursacht durch eine Explosion, erfüllt die Gleichung

$$P_{tt} - 25P_{xx} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,,$$

wobei $P(x,t)$ den Druck zur Zeit t am Ort x bezeichnet. Die Anfangsbedingungen zur Zeit der Explosion $t = 0$ sind

$$P(x,0) = \begin{cases} 8 & |x| \leq 3\,, \\ 0 & |x| > 3 \end{cases}$$

$$P_t(x,0) = \begin{cases} 3 & |x| \leq 3\,, \\ 0 & |x| > 3\,. \end{cases}$$

Ein Gebäude steht am Punkt $x_0 = 12$ und hält einem Druck von $P = 9$ stand. Wird das Gebäude zusammenbrechen?

9.4. Superpositionsprinzip (korrigiert). Betrachte das inhomogene Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(x+t) & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Reduziere das Problem zuerst auf ein homogenes Problem und benutze dann die d'Alembertsche Formel für die homogene Wellengleichung.
Hinweis für eine partikuläre Lösung: Ein geeigneter Ansatz ist:

$v(x,t) = (\alpha t + \beta)(\gamma \cos(x+t) + \delta \sin(x+t))$.