10.1. Gezupfte Saite. Wir wollen das Schwingungsverhalten einer gezupften Saite analysieren. Dazu sei angenommen, dass die Seite unendlich lang ist und gemäss der eindimensionalen Wellengleichung schwingt. Bezüglich der Anfangsbedingung(en) wollen wir davon ausgehen, dass die Saite, die bei $x = -1$ und $x = 1$ auf die x-Achse niedergedrückt wird und bei $x = 0$ (um eine Einheit gegenüber der x-Achse) ausgelenkt ist, zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird. (Damit ist die Anfangsgeschwindigkeit $u_t(\cdot, 0)$ durch die konstante Nullfunktion gegeben und die Anfangsauslenkung $u(\cdot, 0)$ durch die Gestalt der Saite in dem Moment, da sie losgelassen wird.) Mit anderen Worten:

(a) Löse das folgende Anfangswertproblem für die 1-D Wellengleichung mit der d'Alembertschen Formel:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dabei sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt gegeben:

$$g(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(b) Skizziere den Graphen der Funktion $u(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$.

10.2. Fast eine Wellengleichung. Finde die allgemeine Lösung von

$$\begin{cases} u_{ttx} - u_{xxx} = t^2 & x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_{xt}(x,0) = \sin(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Hinweis: Betrachte zuerst $v(x,t) = u_x(x,t)$. Welche Gleichung erfüllt v? Wende das Superpositionsprinzip an, um v zu bestimmen. Beachte auch, dass die Gleichung zu wenig Rand-/Anfangswerte hat, um vollständig bestimmt zu sein.